

# Cálculo Diferencial e Integral II

*Renam Luis Acorsi*

## INFORMAÇÕES SOBRE O AUTOR

### **Gilberto Capistrano Cunha de Andrade**

- Doutorado em Matemática Aplicada, Estatística pela Universidade da Beira Interior - UBI - PORTUGAL (diploma reconhecido pela UFABC).
- Mestrado em Engenharia de Energia, Inteligência Artificial, UNIFEI-MG.
- Especialização em Matemática e Estatística pela UFLA-MG.
- Graduação - Licenciatura Plena Matemática - FEPI-MG.

### **Sobre o Autor**

Doutor em Matemática Aplicada/Estatística pela Universidade da Beira Interior UBI Covilhã/Portugal (2015), com diploma reconhecido pela Universidade Federal do ABC. Mestre em Engenharia de Energia na Universidade Federal de Engenharia de Itajubá MG, UNIFEI (2009). Possui graduação em Matemática, Licenciatura Plena, pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Itajubá, FAFI (1999). Tem especialização em Matemática e Estatística pela ‘Universidade Federal de Lavras-MG, UFLA (2007). Professor conteudista em várias disciplinas. Professor na Pós-graduação EndeX - Pouso Alegre-MG, lecionando conteúdos nas áreas de Administração, Economia, Engenharia e Matemática Financeira. Professor do Centro de Educação Profissional de Itajubá-MG, lecionando conteúdos na área de Ciências Exatas e da Terra.

### **Renam Luis Acorsi**

- Mestrado em Engenharia Química aplicada em Biocatálise e Processos Bioquímicos pela UEM-PR.
- Graduação em Engenharia Química pela UEM-PR.
- 

### **Sobre o Autor**

Doutorando em Engenharia Química pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Estadual de Maringá (PEQ-UEM), na linha de pesquisa Biocatálise e

Processos Bioquímicos, com previsão de conclusão em 2019. Mestre em Engenharia Química pelo PEQ-UEM, na linha de pesquisa Biocatálise e Processos Bioquímicos, concluído em 2012. Graduado em Engenharia Química pela UEM, com conclusão em 2010. Foi professor assistente T40 no Departamento de Engenharia Química da Universidade Estadual de Maringá (DEQ-UEM), ministrando aulas para os cursos de Engenharia Química, Engenharia de Produção, Engenharia Elétrica, Bioquímica e Tecnologia em Biotecnologia.

## INTRODUÇÃO DO LIVRO

O Cálculo é dividido em diversas disciplinas no ensino superior. Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Numérico e Cálculo de Várias Variáveis são algumas dessas disciplinas, as quais você certamente encontrará no decorrer de cursos superiores das áreas de Ciências Exatas e Tecnológicas. Todas essas disciplinas acabam servindo como alicerce para várias matérias avançadas dos cursos que direcionarão a aplicação dos conceitos apresentados aqui. Logo, um estudante que domine bem os conceitos básicos do Cálculo conseguirá, certamente, desenvolver melhor todas as aplicações necessárias em seu curso de graduação.

Devido à grande quantidade de assuntos englobados pelo Cálculo, alguns cursos de Engenharia, Matemática e Física, por exemplo, chegam a ter até cinco disciplinas de Cálculo nos primeiros anos da graduação. Em razão dessa divisão, o presente livro tratará apenas dos tópicos de Cálculo com mais de uma variável. Assim, você terá em mãos um livro que amplia os conhecimentos desenvolvidos no Cálculo Diferencial e Integral para casos de trabalhos mais próximos do que se vê em casos reais, que são aqueles nos quais as funções apresentam mais de uma variável.

Logo, é de se esperar que o desenvolvimento deste livro ocorra de uma forma semelhante à maneira como você, certamente, estudou Cálculo Diferencial e Integral. Por isso, o primeiro conceito desenvolvido é o de espaços  $n$ -dimensionais e funções de mais de uma variável. No entanto, por questões de simplicidade, os focos principais serão os casos de funções com duas e três variáveis. Com a definição e a apresentação dessas funções, os gráficos de funções de duas variáveis serão apresentados.

Terminada a definição das funções de mais de uma variável, é natural que iniciemos os estudos de **limites de funções com mais de uma variável**. Todos os conceitos desenvolvidos para o caso de uma função de uma variável serão expandidos aqui para funções com duas ou mais variáveis. Tal como você imagina, o cálculo de limites ainda será fundamental para o desenvolvimento de conceitos mais avançados do Cálculo, como a **continuidade de uma função com mais de uma variável**.

Finalizando o estudo de limites das funções com mais de uma variável, no estudo de determinados problemas em que se tem que uma variável é mantida constante e a outra não, você sempre se verá frente a um tipo característico de limite. Esse limite especial será definido como a derivada parcial da função com mais de uma variável. Com a definição desse limite e com a busca por uma forma mais simples de avaliá-lo, também será feita uma análise geométrica do significado de uma

**derivada parcial** e da regra da cadeia. Como existe mais de uma variável no caso estudado, é natural que se possa avaliar casos de derivadas sucessivas, alternando-se as variáveis. O passo seguinte é fazer a avaliação de uma das principais aplicações das derivadas, focando no estudo de funções. Iremos, então, avaliar os máximos e mínimos das funções com mais de uma variável

Finalizando o material, chega o momento de estudarmos as integrais de **funções com mais de uma variável** ou as **integrais múltiplas**. Basicamente, iremos estudar os casos de integrais duplas e triplas, sendo que, durante o desenvolvimento dos conceitos, serão apresentadas técnicas de mudança de variáveis, a fim de facilitar o seu trabalho em casos específicos.

Antes de iniciarmos nossos estudos, é importante enfatizar a dificuldade de escrever um material para disciplinas da área de Ciências Exatas. Geralmente, são disciplinas que assustam pelo próprio nome, com estigmas adquiridos ainda nos ensinamentos fundamental e médio. Com isso em mente, busquei utilizar uma linguagem mais simples e apresentar uma grande quantidade de exemplos práticos dos temas estudados, visando aumentar sua compreensão e absorção dos conceitos apresentados. No entanto, você deve ter em mente que esta é uma disciplina que exige muita prática, para maximização do aprendizado. Então, você deverá realizar o máximo possível de exercícios sobre os temas estudados.

Espero que seja possível aproveitar este material e que ele contribua para seu crescimento pessoal e profissional. Bons estudos!

UNIDADE I

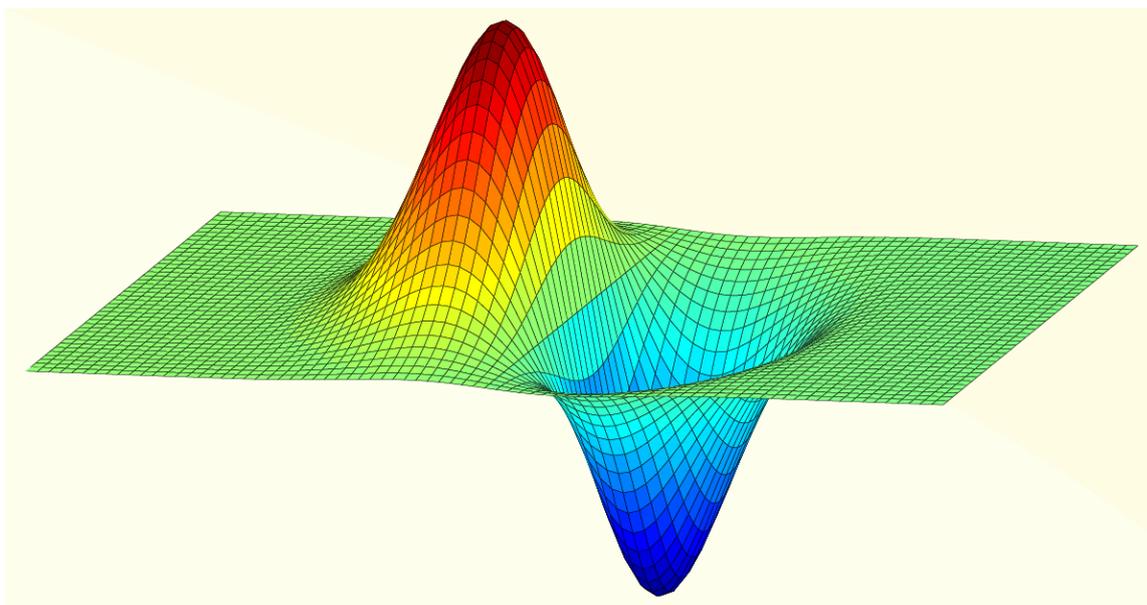
# Funções de Diversas Variáveis

*Renam Luis Acorsi*

## Introdução

O objeto central de estudos do Cálculo são as funções. Ao iniciar seus estudos de Cálculo, você, caro(a) aluno(a), certamente você já estudou o que são funções com uma única variável, quais suas características e como aplicá-las de forma adequada nos mais diferentes tipos de problemas.

Mas as funções de uma variável têm um uso limitado, sendo muito comum que você, estudante, precise lidar com funções mais complexas, que apresentam mais de uma variável. Sendo assim, a presente Unidade visa fundamentar as bases que você precisará para trabalhar com tais funções de várias variáveis. Logo, inicialmente será apresentada uma base sobre os espaços dimensionais antes de comentarmos sobre as funções de  $n$  variáveis, o que facilitará sua compreensão sobre as funções mais complexas. Após essa base ser firmada, partiremos para o estudo do Cálculo, efetivamente, em que veremos limites e continuidade dessas funções de  $n$  variáveis.



Fonte: Denis Ismagilov / 123RF.

## ESPAÇO DE N DIMENSÕES

Ao iniciar seus estudos em Cálculo, você, estudante, certamente foi apresentado a determinadas grandezas conhecidas como *variáveis*, sendo, inclusive, um dos focos do Cálculo, realizar análises de como uma variável irá se relacionar com outra variável. Cabe aqui, então, realizar uma nova abordagem desses conceitos, de modo a expandirmos esses conhecimentos prévios que você já apresenta.

Primeiramente, considere apenas uma variável  $x$  qualquer. Uma variável qualquer simplesmente indica um valor qualquer, segundo Thomas Júnior (2016). Assim, quando temos apenas uma variável em mãos, pouco podemos fazer, além de observar os valores, visto que com apenas um conjunto de números, não podemos relacionar estes com nada. Assim, como cada variável pode ser representada simplesmente como um ponto, podemos dizer que o conjunto de valores de uma variável é um **espaço unidimensional**, de modo que um valor de uma variável pode ser representado simplesmente como um valor, por exemplo,  $x$  (MORETTIN; HAZZAN; BUSSAB, 2016).

O estudo de variáveis solitárias não é de interesse prático para diversas áreas da ciência. Durante seus estudos de Cálculo, você se deparou com situações e problemas de **funções**, que, segundo Stewart (2017a), são uma lei que associa um único elemento  $y$  a cada elemento  $x$  de um determinado conjunto, chamado *domínio* da função. Ou seja, uma função é uma regra que associa as variáveis  $x$  do domínio com um único valor  $y$ , sendo o conjunto de todos os valores possíveis de  $y$  chamado de *imagem*. De forma geral, as variáveis  $x$  do domínio são chamadas **variáveis independentes** e as variáveis  $y$  da imagem são chamadas **variáveis dependentes**.

Assim, os problemas com os quais você lidou ao estudar Cálculo eram do tipo  $y = f(x)$ . Resolvendo problemas desse tipo, uma das maneiras para representar a resposta obtida é na forma de um par ordenado  $(x, y)$ . Note que, ao trabalharmos com uma função  $y = f(x)$ , estamos, de fato, lidando com a observação simultânea de duas variáveis, conforme Morettin, Hazzan e Bussab (2016). Por isso, tais problemas podem ser tratados como a análise de um **espaço bidimensional**.

No entanto, você certamente já deve ter imaginado que os estudos de uma função não devem se limitar ao caso da observação simultânea de apenas duas variáveis. Granville, Smith e Longley (1986) indicam exemplos simples de funções com mais de uma variável, tirados da geometria espacial, como:

- a. ao avaliar o volume de um cilindro, você utiliza a função  $V_{cil} = \pi r^2 h$ , ou seja, o volume é função tanto da altura quanto do raio do objeto;
- b. a área de um triângulo ABC qualquer pode ser calculada em função do seno de um de seus ângulos segundo a função  $A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \alpha$ , em que  $a$  e  $b$  são dois lados do triângulo e  $\alpha$  é o ângulo entre estes lados. Logo, a função área de um triângulo pode ser expressa como uma função de três variáveis.

Além disso, funções podem ser empregadas na modelagem matemática de fenômenos. Logo, você já deve ter percebido que os estudos de uma função não devem se limitar ao caso da observação simultânea de apenas duas variáveis. Certamente, você consegue imaginar que fenômenos mais complexos podem apresentar mais de uma variável independente.

Agora é o momento de estudarmos casos de funções com mais de uma variável. Antes de partirmos para o estudo das funções mais complexas, iremos, primeiramente, trabalhar um pouco com as dimensões de diferentes espaços.

### **Espaços bidimensionais**

Segundo Leithold (1994), o conjunto de todos os números inteiros, racionais e irracionais é conhecido como **conjunto dos números reais**, sendo representado pelo símbolo  $\mathfrak{R}$  ou  $\mathbb{R}$ . Esse conjunto será o foco do desenvolvimento desta unidade.

Quando tomamos dois números reais e os representamos em uma ordem pertinente, temos um **par ordenado**. Assim, sendo  $x$  e  $y$  números reais, o par  $(x, y)$  representa um *par ordenado real*. É imprescindível que você note a importância da ordem em que se representa os elementos num par ordenado: o par  $(x, y)$  é diferente do par  $(y, x)$ , mesmo que ambos pares sejam formados pelos mesmos números reais (MORETTIN; HAZZAN; BUSSAB, 2016).

Agora, assim como foi feito com os números reais, você também pode considerar todos os pares ordenados reais arranjados em um conjunto. Tal conjunto formado por todos os pares ordenados reais é conhecido como **espaço bidimensional**. Como um par ordenado real contém dois elementos do conjunto dos números reais, o espaço bidimensional pode ser representado por  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ou simplesmente por  $\mathbb{R}^2$ . Numa notação matemática mais correta, esse conjunto é representado da seguinte maneira:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

Morettin, Hazzan e Bussab (2016) indicam que os elementos do espaço bidimensional também podem ser representados geometricamente, com o uso do plano cartesiano. Em tal representação, o primeiro elemento do par ordenado indica um valor da abscissa, ou seja, do eixo horizontal do plano cartesiano, enquanto o segundo elemento do par ordenado indica um valor do eixo das ordenadas, ou seja, do eixo vertical do plano cartesiano. Logo, um par ordenado pode ser visto simplesmente como a determinação de um ponto no plano cartesiano, tal qual a Figura 1.1 ilustra.

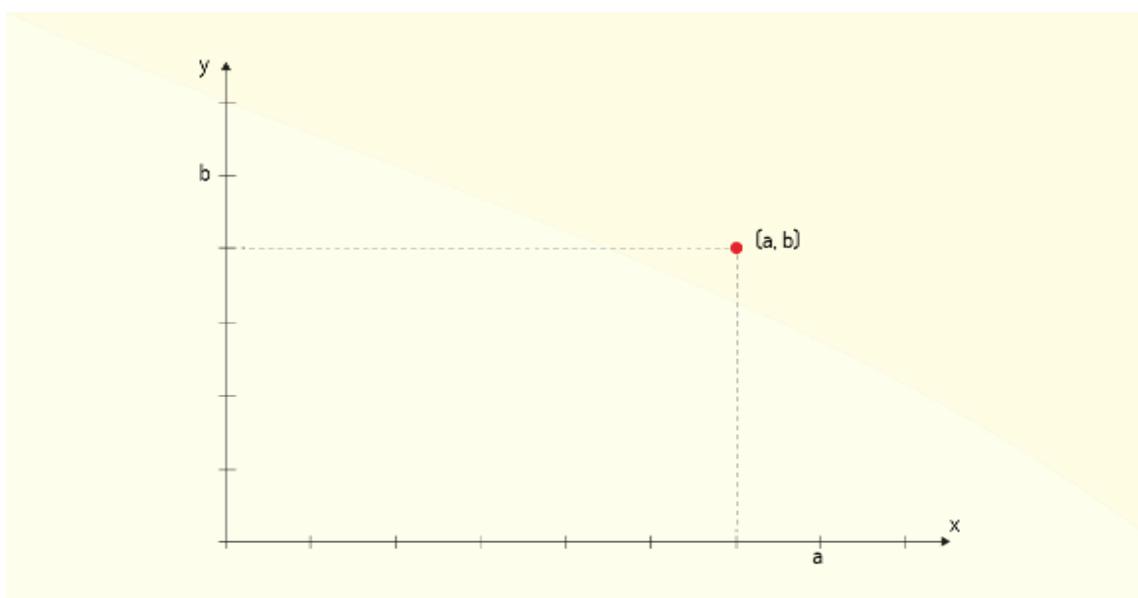


Figura 1.1 - Representação geométrica de um par ordenado  $(a, b)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, como foi apresentado na Figura 1.1, a convenção de representação de um par ordenado indica, primeiro, a abscissa, depois, apresenta o valor das ordenadas.

Outro destaque de Morettin, Hazzan e Bussab (2016) se dá ao fato de que uma função pode ser facilmente representada na forma de um conjunto de pares ordenados. Ou seja, uma função pode ser representada por um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  por meio de uma **relação binária** ou relação no  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo, a função  $y = f(x) = x + 2$  pode ser representada pelo conjunto de pares ordenados na forma  $(x, x + 2)$ , para qualquer valor de  $x \in \mathbb{R}$ . Ou seja, a função  $y = f(x)$  indicada pode ser representada por um conjunto

$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = x + 2\}$ , sendo  $Y$  um subconjunto do espaço bidimensional. Geometricamente, este subconjunto  $Y$  é apresentado na Figura 1.2, em que se pode ver três pontos destacados.

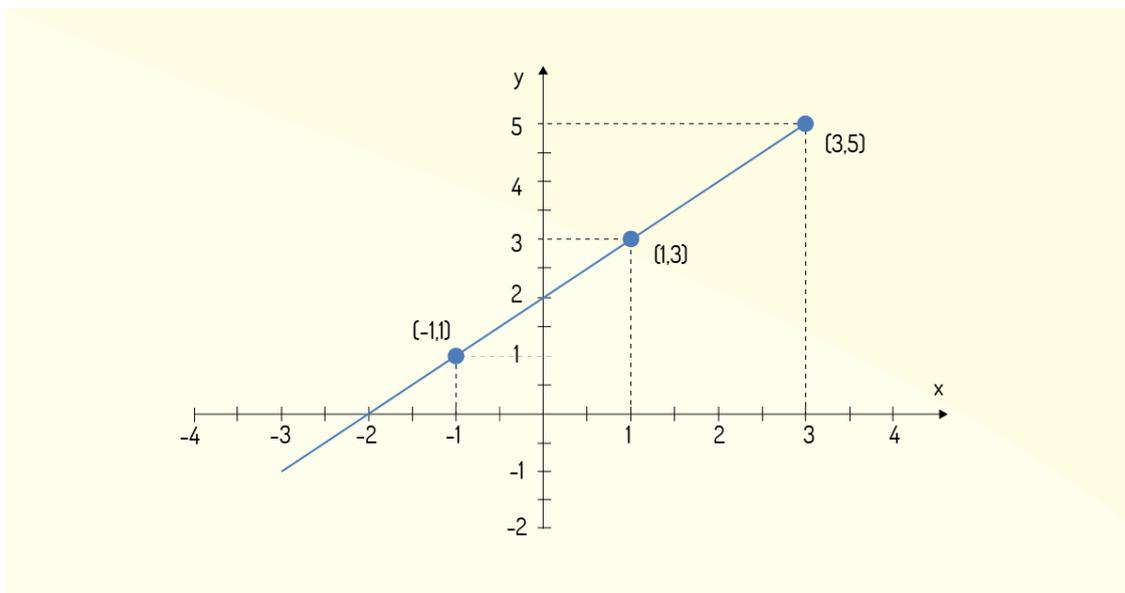


Figura 1.2 - Representação geométrica do conjunto  $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = x + 2\}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Morettin, Hazzan e Bussab (2016) ainda apresentam a seguinte conclusão: seja a função definida por  $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$  e seja um ponto descrito pelo par ordenado  $(a, b)$ , no qual  $a$  pertence ao domínio da função. Para qualquer ponto no qual  $b > y$ , tem-se que o ponto encontrar-se-á acima da curva obtida pela união dos pares ordenados que satisfazem a função  $y = f(x)$ . Já para o caso de  $b < y$ , o ponto estará abaixo da curva obtida pela união dos pares ordenados que satisfazem a função  $y = f(x)$ .

Essa análise geométrica binária pode ser estendida para tipos especiais de funções. Por exemplo, quando se tem uma inequação, o resultado geométrico é um semiplano, que pode estar tanto acima quanto abaixo da curva apresentada. Tome como exemplo a inequação  $y \geq x + 2$ . Tem-se que o conjunto de pares ordenados que a representa é  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \geq x + 2\}$ , ou seja, qualquer valor de  $y$  maior ou igual à  $x + 2$  satisfaz a inequação dada. Assim, na Figura 1.3, a área destacada acima da curva representa um semiplano do qual pares ordenados que satisfazem a inequação podem ser encontrados.

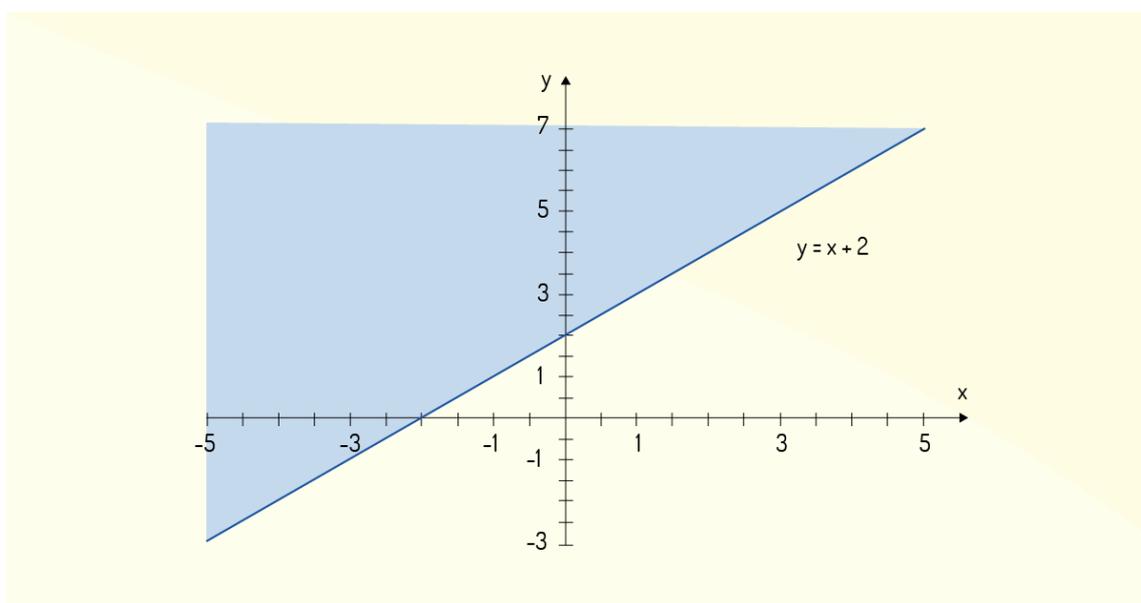


Figura 1.3 - Representação geométrica do conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} | y \geq x + 2\}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Um outro exemplo de semiplano formado pelo conjunto de todos os pares ordenados que satisfazem uma inequação é no caso da inequação que define um círculo. Retomando a função que descreve uma circunferência, você deve se lembrar que tal função é *implícita*, sendo escrita na forma  $y^2 + x^2 = r^2$ . Considere como exemplo, então, o conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} | y^2 + x^2 \leq 1\}$ . Nele, temos uma função implícita que define uma circunferência de raio 1, sendo que o conjunto  $C$  irá conter todos os pares ordenados que satisfazem a função  $y^2 + x^2 = 1$  e todos os pontos contidos dentro da circunferência descrita por tal curva. Na Figura 1.4, são mostradas a representação geométrica da função  $y^2 + x^2 = 1$  e a área, que está destacada, indicando os pontos contidos no conjunto  $C$ .

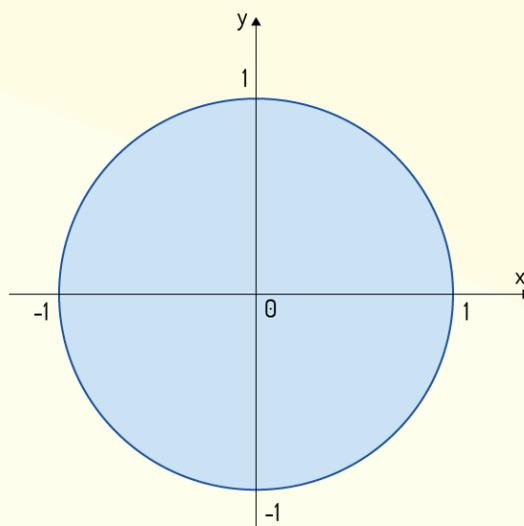


Figura 1.4 - Representação geométrica do conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^2 \leq 1\}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que caso o conjunto fosse  $C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^2 \geq 1\}$ , os pontos a serem considerados seriam aqueles fora da circunferência. Lembre-se também que os sinais  $\geq$  e  $\leq$  incluem os pontos da curva. Caso o sinal de desigualdade usado fosse  $>$  ou  $<$ , os pontos sobre a curva não seriam considerados como parte do conjunto de pares ordenados que satisfazem a relação indicada.

Morettin, Hazzan e Bussab (2016) ainda indicam que, no plano cartesiano, também somos capazes de avaliar qual a distância entre dois pontos de forma relativamente simples. Considere os pontos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$ , sendo  $A, B \in \mathbb{R}^2$ . Geometricamente, esses pontos são representados tal qual nos mostra a Figura 1.5.

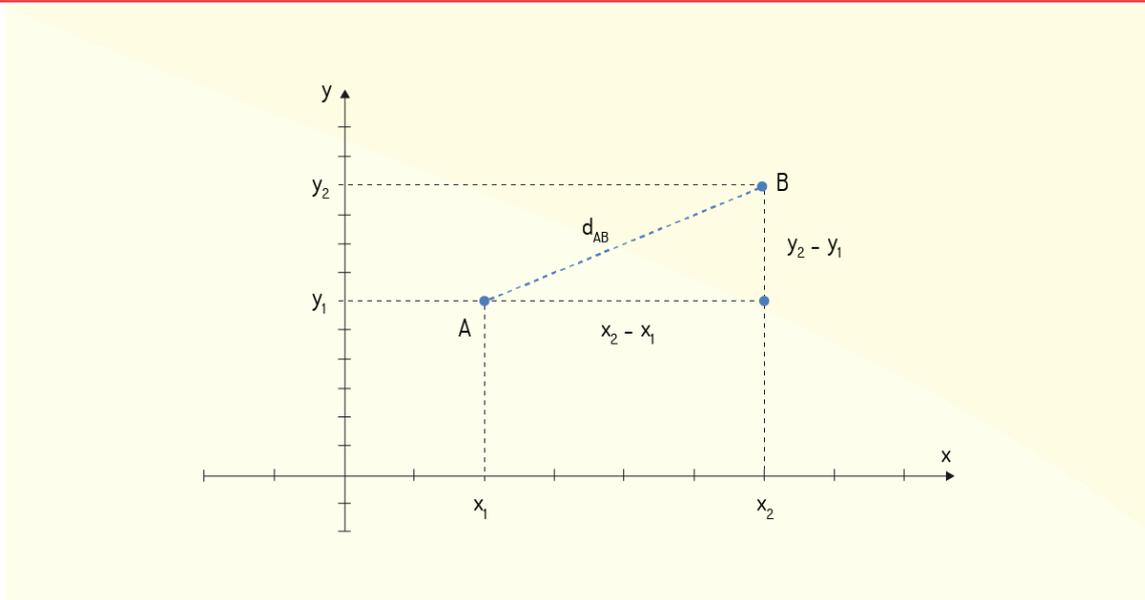


Figura 1.5 - Representação geométrica dos pontos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que os dois pontos formam um triângulo retângulo quando se usa um ponto auxiliar  $V(x_2, y_1)$ , para o qual se tem os lados  $AV = x_2 - x_1$  e  $BV = y_2 - y_1$ , além da hipotenusa  $d_{AB}$ , que é a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ . Logo, da trigonometria, tem-se que:

$$d_{AB}^2 = AV^2 + BV^2 \rightarrow d_{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

**Exemplo 1.1:** Considere os pontos  $A = (2,6)$ ,  $B = (4,3)$  e  $C = (0,0)$ . Calcule, então, as distâncias  $d_{AB}$ ,  $d_{AC}$  e  $d_{BC}$ .

### Solução

Na Figura 1.6, podemos ver geometricamente a posição de cada um dos três pontos apresentados:

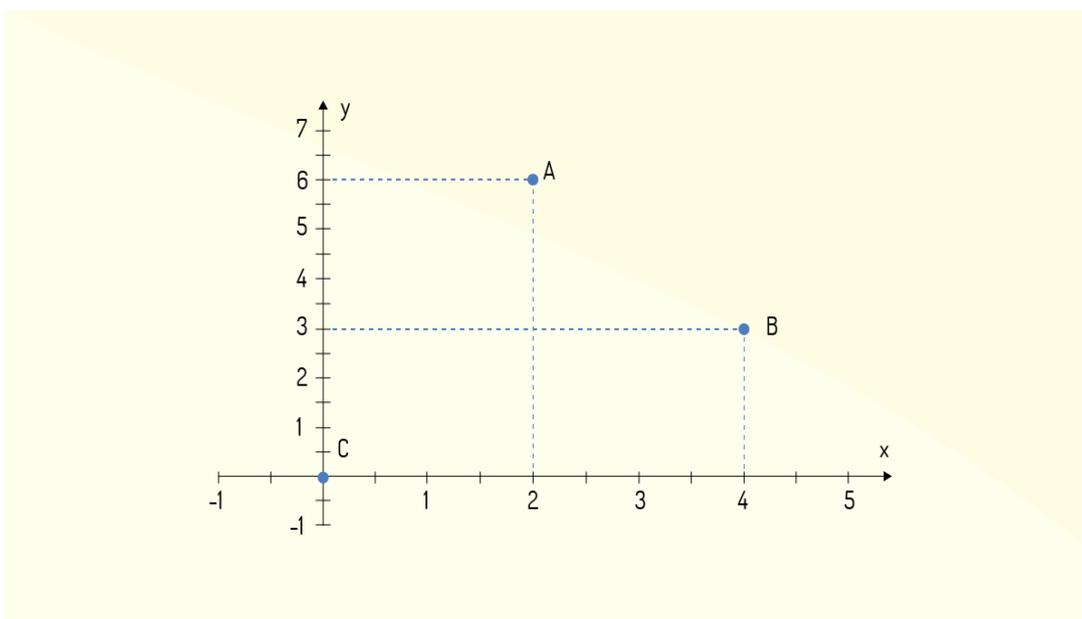


Figura 1.6 - Representação geométrica dos pontos A, B e C dados

Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando o raciocínio trigonométrico apresentado anteriormente, as distâncias entre os pontos pedidos poderão ser calculadas utilizando a Equação (2) nas seguintes formas:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

Então:

$$d_{AB} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

## Espaços tridimensionais

De forma semelhante ao caso dos pares ordenados, Morettin, Hazzan e Bussab (2016) dizem que se tomamos três números reais e os representamos em uma ordem pertinente, temos uma **tripla ordenada**. Assim, sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  números reais, a tripla  $(x, y, z)$  representa uma *tripla ordenada real*. Considerando, então, todas as triplas ordenadas reais em um conjunto, você obtém um conjunto conhecido como **espaço tridimensional**. Cada tripla ordenada real contém três elementos do conjunto dos números reais, fazendo com que o espaço tridimensional possa ser representado por  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Na notação matemática de conjuntos, tem-se:

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\} \quad (3)$$

Tal qual os pares ordenados, as triplas ordenadas também podem ser representadas geometricamente como pontos, mas não no plano cartesiano. Os elementos de  $\mathbb{R}^3$  precisam de um terceiro eixo para serem representados. A Figura 1.7 exemplifica a representação geométrica de um ponto  $A = (a, b, c)$ .

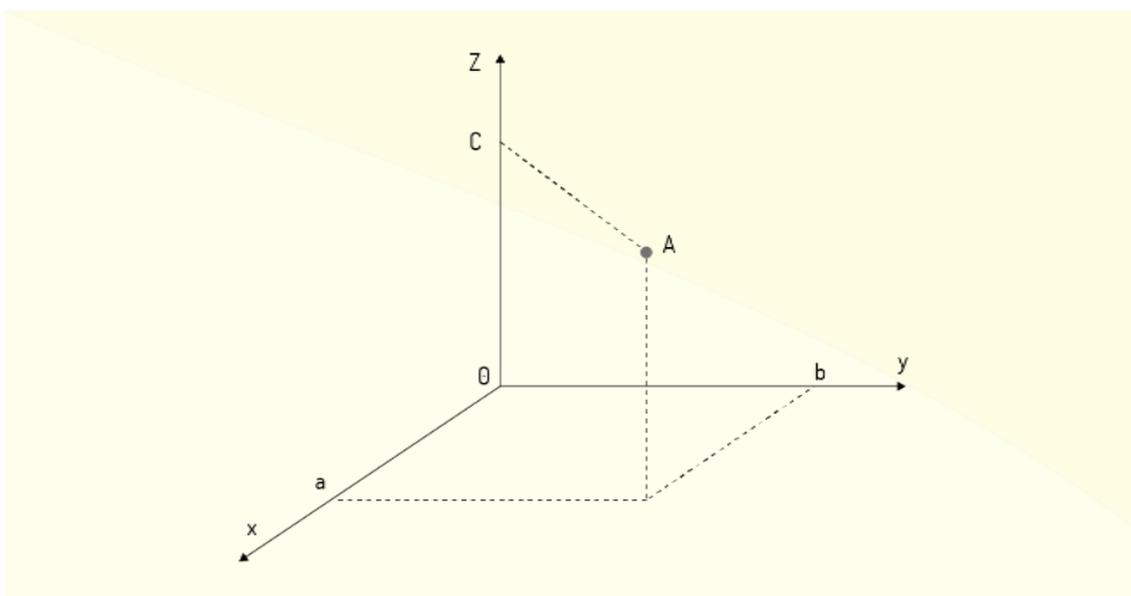


Figura 1.7 - Representação geométrica do ponto  $A = (a, b, c)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo Morettin, Hazzan e Bussab (2016), é importante estar atento ao trabalhar com triplas ordenadas na forma geométrica, pois se uma das coordenadas for igual a zero, o conjunto de pares ordenados que irá representar a tripla é um plano determinado pelos demais eixos. Assim, o conjunto  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$  consiste de todos os pontos do plano formado pelos eixos  $0y$  e  $0z$ ; para um conjunto  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid y = 0\}$ , seriam todos os pontos do plano formado pelos eixos  $0x$  e  $0z$ ; e, para um conjunto  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid z = 0\}$ , seriam todos os pontos do plano formado pelos eixos  $0x$  e  $0y$ . Na Figura 1.8 são mostrados esses conjuntos.

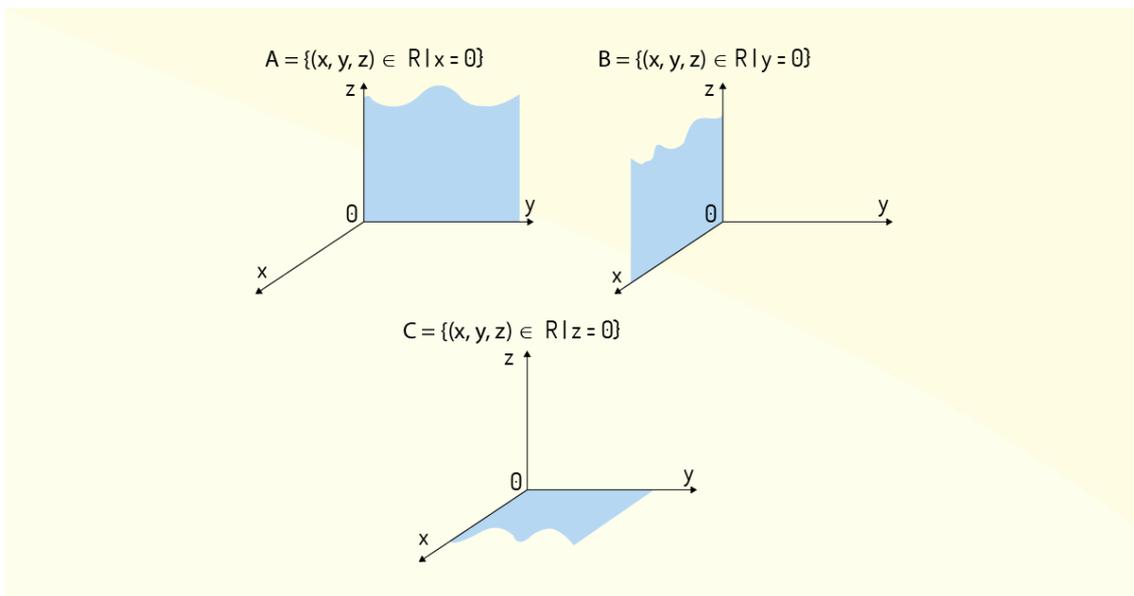


Figura 1.8 - Representação geométrica dos conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em um exemplo semelhante ao discutido anteriormente, caso uma das coordenadas da tripla ordenada seja um outro inteiro diferente de zero, o resultado geométrico é semelhante ao mostrado na Figura 1.8. A única diferença consistirá em que o plano formado será deslocado de acordo com a necessidade. Por exemplo, o conjunto  $C' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid z = 1\}$  possui representação geométrica idêntica à do conjunto  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid z = 0\}$ ; a diferença é que o plano deverá se encontrar deslocando 1 unidade no sentido positivo do eixo  $z$ , como mostra a Figura 1.9.

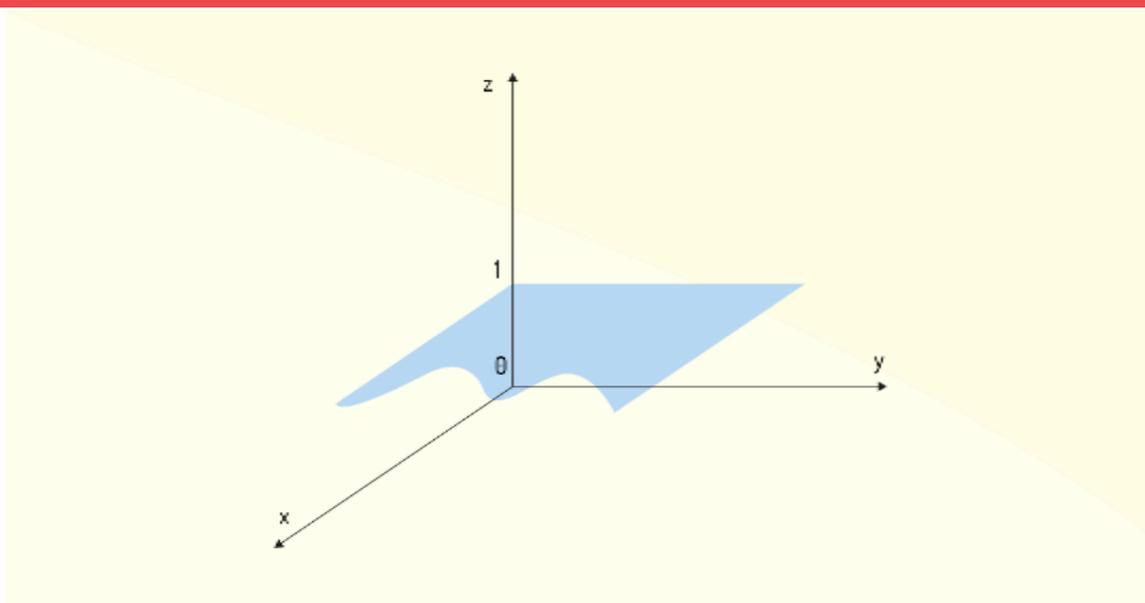


Figura 1.9 - Representação geométrica de um conjunto  $C' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid z = 1\}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Concluindo o estudo sobre espaço tridimensional, de acordo com Morettin, Hazzan e Bussab (2016), a distância entre dois pontos também pode ser facilmente avaliada com técnicas de trigonometria, como se fosse a diagonal de um cubo, partindo de uma linha de raciocínio semelhante àquela usada para o caso da distância entre dois pontos no plano. Na Figura 1.10 tem-se os pontos  $A(x_1, y_1, z_1)$  e  $B(x_2, y_2, z_2)$ , sendo que eles se localizam em pontos diagonais opostos de um cubo imaginário.

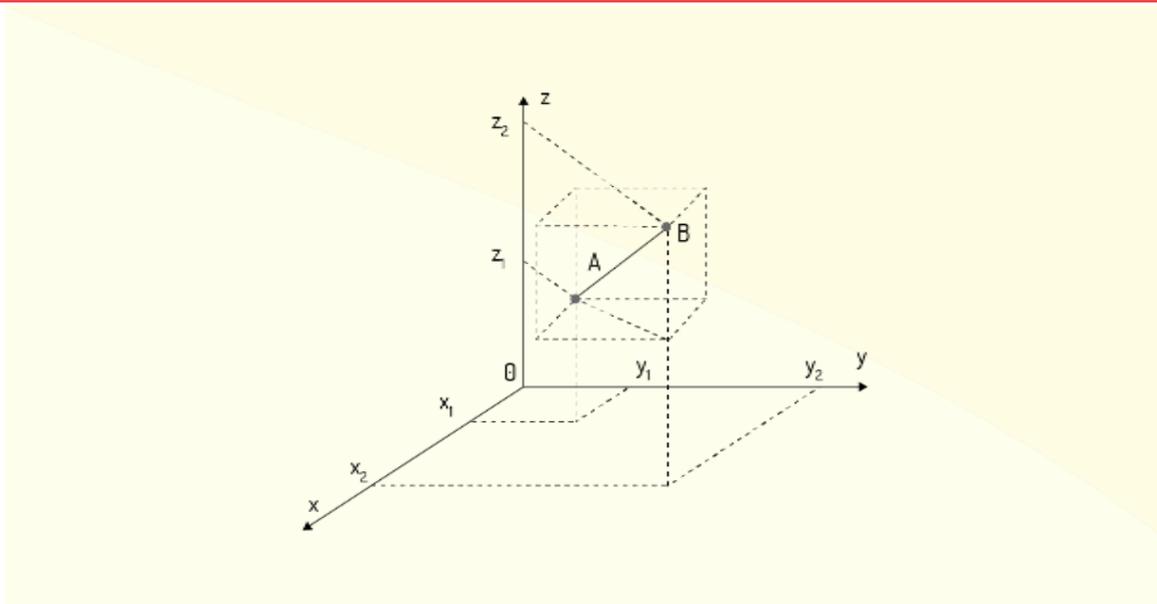


Figura 1.10 - Representação geométrica da distância dos pontos A e B

Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, a distância  $d_{AB}$  entre os pontos pode ser avaliada da seguinte maneira:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (4)$$

### Espaços n-dimensionais

Chegando a este ponto, você, estudante, deve ter percebido que podemos formar seqüências de quantos números reais quisermos, de modo a encontrarmos **n-uplas ordenadas** reais, para as quais o conjunto contendo todas essas n-uplas ordenadas é chamado **espaço n-dimensional**. Morettin, Hazzan e Bussab (2016) destacam que esse espaço n-dimensional pode ser representado por  $\mathbb{R}^n$ . Na notação matemática de conjuntos, tem-se:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \quad (5)$$

Perceba que a definição dada acima por Morettin, Hazzan e Bussab (2016) corrobora o que já vimos anteriormente sobre espaços bi e tridimensionais. Na verdade, se você substituir  $n = 1, 2$  ou  $3$ , você terá o conjunto dos números reais, um espaço bidimensional

e um espaço tridimensional, como descrito anteriormente. Faça essas substituições em (5) e compare com o que é mostrado em (1) e (3).

Um ponto interessante sobre o espaço  $n$ -dimensional mostrado por Morettin, Hazzan e Bussab (2016) é o fato de que apenas  $n$ -uplas ordenadas de  $n \leq 3$  admitem representação geométrica. Logo, espaços quadridimensionais ou de dimensões superiores não poderão ser representadas na forma gráfica. No entanto, mesmo com essa limitação, ainda podemos avaliar qual a distância entre dois pontos para qualquer que seja o valor de  $n$ . Morettin, Hazzan e Bussab (2016) afirmam que, para qualquer ponto  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  pertencentes a  $\mathbb{R}^n$ , a distância  $d_{AB}$  pode ser avaliada da seguinte forma:

$$d_{AB} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2} \quad (6)$$

## REFLITA

A questão de espaços com mais de três dimensões é algo que muitos estudantes têm dificuldade de visualizar e mesmo imaginar, até porque somente somos capazes de representar geometricamente dimensões de  $n \leq 3$ . Você consegue imaginar, então, qual o sentido de estudarmos tais casos de dimensões maiores que três e como diferentes áreas da ciência podem se beneficiar de dimensões mais complexas?

## ATIVIDADES

- 1) Um dos pontos-chave de se estudar pontos no espaço  $\mathbb{R}^n$  é saber identificar qual a distância de um ponto a outro, o que se mostrará uma habilidade importante para definições futuras na presente disciplina. Visando à prática deste tópico, analise as alternativas a seguir: apenas uma delas indica uma distância entre pontos calculada erroneamente. Assinale aquela em que a distância apresentada é correta.
- a) A distância entre os pontos  $A = (-2,5)$  e  $B = (4,3)$  é igual a  $4\sqrt{10}$  unidades de comprimento.
  - b) A distância entre os pontos  $C = (1,1,1,1)$  e  $D = (2,3,3,1)$  é igual a 3 unidades de comprimento.
  - c) A distância entre os pontos  $E = (-2, -1,3)$  e  $F = (0,3, -1)$  é igual a 2 unidades de comprimento.
  - d) A distância entre os pontos  $A = (-2,5)$  e  $F = (0,3, -1)$  é igual a 5 .
  - e) A distância entre os pontos  $G = (-2, -3, -3)$  e  $H = (4,3,0)$  é igual a  $3\sqrt{5}$  unidades de comprimento.

## FUNÇÕES COM MAIS DE UMA VARIÁVEL

Agora que fizemos uma breve revisão a respeito das dimensões dos espaços, voltaremos nossos estudos de forma mais direta e aplicada para o Cálculo. Faremos isso expandindo o conceito de função com o qual você já está acostumado.

Como já foi dito no início da presente Unidade, existem inúmeras funções que apresentam mais de uma variável independente. Como Thomas Júnior (2016) e Stewart (2017b) afirmam, essa situação de funções com mais de uma variável independente são corriqueiras no mundo real, sendo possível apresentar uma gama de exemplos simples de tal situação.

Já no início desta unidade, foram apresentados dois exemplos geométricos de funções com mais de uma variável independente, mas tal lista pode ser expandida, apresentando exemplos mais abrangentes e de diferentes áreas. Por exemplo:

- a. a velocidade do som se propagando na água do mar,  $v_{\text{água}}$ , é uma função que pode ser escrita de forma simplificada como uma função da concentração de sais na água,  $C_S$ , e sua temperatura,  $T$ . Então, pode-se escrever que  $v_{\text{água}} = f(C_S, T)$ .
- b. para se avaliar a área externa do corpo de um ser humano,  $A_{ex}$ , pode ser proposta uma função que leva em consideração tanto a altura  $h$  do indivíduo quanto seu peso  $w$ , ou seja,  $A_{ex} = f(h, w)$ .
- c. na química e na física, você pode ser confrontado constantemente com o problema de avaliar a pressão de um gás ideal. Para tal, você deve usar a equação de estado  $P = (nRT)/V$ , na qual se tem que  $P$  é a pressão do gás,  $n$  é o número de mols do gás,  $R$  é a constante universal dos gases ideais,  $T$  é a temperatura que o gás se encontra e  $V$  é o volume no qual o gás está contido. Ou seja, tem-se que  $P$  é uma função de  $n$ ,  $T$  e  $V$ , visto que  $R$  é uma constante. Ou seja, para este caso, tem-se que  $P = f(n, T, V)$

Logo, agora vamos expandir as definições e conceitos desenvolvidos para funções com uma única variável independente para os casos em que se tem mais de uma variável independente.

Como visto anteriormente, o espaço  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  contém todas as  $n$ -uplas de números reais possíveis, sendo que cada  $n$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  é um ponto no espaço  $n$ -dimensional. Partindo disso, Leithold (1994) apresenta as seguintes definições:

**Definição 1:** seja  $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  um ponto no espaço  $n$ -dimensional e o número real  $w$ . Então, o conjunto de pares ordenados  $(P, w)$  no qual dois pares distintos não apresentam os primeiros elementos iguais determinam uma *função de  $n$  variáveis*;

**Definição 2:** o conjunto que contém todos os valores que são possíveis para o ponto  $P$  da Definição 1 é conhecido como **domínio** da função;

**Definição 3:** o conjunto que contém todos os valores que são possíveis para o valor real  $w$  da Definição 1 é conhecido como **imagem** da função.

Das Definições 2 e 3, podemos inferir que o domínio de uma função de  $n$  variáveis será um conjunto de  $\mathbb{R}^n$ , enquanto a imagem da função será apenas um conjunto de números reais, ou seja, um conjunto de  $\mathbb{R}$ . Conferindo, também, a Definição 1, note que quando se tem  $n = 1$ , então  $P$  se reduz a um único valor real. Logo, o par ordenado indicado contém dois elementos reais, ou seja, é exatamente o caso de uma função com uma única variável. Veja ainda que o domínio da função neste caso será um conjunto de  $\mathbb{R}$ , tal qual a definição de uma função de uma variável indica. Ou seja, de acordo com Leithold (1994), uma função de uma variável é o caso particular da Definição 1, em que  $n = 1$ .

Após a situação mais simples de uma função, que é o caso de uma única variável, temos, então, o caso de uma função com duas variáveis. Esse tipo de função, segundo Thomas Júnior (2016) e Stewart (2017b), frequentemente é representado como  $z = f(x, y)$ , tem como domínio um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  e, como imagem, um subconjunto de  $\mathbb{R}$  e será o foco principal dos nossos estudos de funções de mais de uma variável, inclusive por ser um caso-limite de capacidade de representação geométrica. Assim como você estudou nos casos de funções de uma única variável, uma função com duas variáveis também pode ser representada por meio de um diagrama de setas. Observe, na Figura 1.11, a ilustração dessa representação.

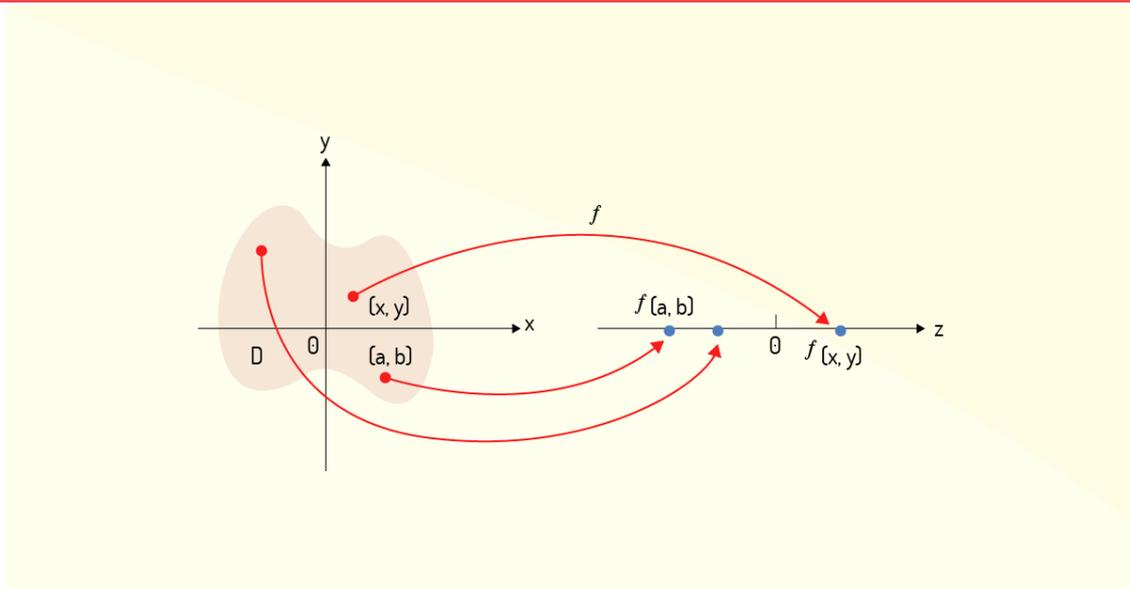


Figura 1.11 - Diagrama de setas para uma função  $z = f(x, y)$

Fonte: Adaptada de Thomas Júnior (2016, p. 796).

Note que o domínio  $D$  da função está destacado à esquerda na Figura 1.11. Do domínio, cada par ordenado  $P = (p_1, p_2)$  está associado a um único elemento real igual à  $f(P) = f(p_1, p_2)$ , tal qual é dada a definição de uma função.

Stewart (2017b) ainda traz um fato importante a respeito das funções. Caso uma função  $f$  de  $n$  variáveis estiver bem definida por uma fórmula, mas não apresentar um domínio especificado, subentende-se que o domínio dela será o conjunto de todos os pontos  $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  para o qual a função retornar um valor real bem definido.

**Exemplo 2.1:** Considere a função  $z$  definida por  $z(x, y) = 2x^2 - 3y$ . Encontre, então,  $z(0,3)$ ,  $z(3a, -5b)$  e  $z(x^2, y^2)$ .

### Solução

Assim como no caso de uma função de uma única variável, basta substituir os valores de acordo com o apresentado nos pares ordenados. Portanto:

$$z(x, y) = 2x^2 - 3y \rightarrow z(0,3) = 2(0)^2 - 3(3)$$

$$z(0,3) = 0 - 9 = -9$$

Mesmo quando se tem incógnitas, o procedimento é o mesmo:

$$z(x, y) = 2x^2 - 3y \rightarrow z(3a, -5b) = 2(3a)^2 - 3(-5b)$$

$$z(3a, -5b) = 2 \cdot 9a^2 + 15b = 18a^2 + 15b$$

Observe que você ainda pode colocar o resultado encontrado acima em evidência:

$$z(3a, -5b) = 3(6a^2 + 5b)$$

Finalizando, o último resultado deverá ser:

$$z(x, y) = 2x^2 - 3y \rightarrow z(x^2, y^2) = 2(x^2)^2 - 3(y^2)$$

$$z(x^2, y^2) = 2x^4 - 3y^2$$

---

Ainda a respeito das funções de duas variáveis, Leithold (1994) define o caso das funções compostas, comumente expressas como  $f \circ g$ :

**Definição 4:** sejam as funções  $f$  e  $g$ , sendo  $f$  uma função de uma variável e  $g$  uma função de duas variáveis. Então, a *função composta*  $f \circ g$  será uma função de duas variáveis, sendo esta função definida como:

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

Para tal função composta, tem-se que o domínio será o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  no domínio da função  $g$ , para os quais se tem que  $g(x, y)$  está no domínio de  $f$ .

Observe que essa definição de função composta pode ser estendida para casos em que a função  $g$  apresenta  $n$  variáveis. Assim, sendo  $f$  uma função de uma variável e  $g$  uma função de  $n$  variáveis, a *função composta*  $f \circ g$  também será uma função de  $n$  variáveis, com a função composta definida como:

$$(f \circ g)(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(g(a_1, a_2, \dots, a_n))$$

Para tal função composta, também se tem como domínio o conjunto de todos os pontos  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  no domínio da função  $g$ , para os quais se tem que  $g(a_1, a_2, \dots, a_n)$  está no domínio de  $f$  (LEITHOLD, 1994).

---

**Exemplo 2.2:** Considere as funções  $f(t) = \ln t + 2t$  e  $g(x, y) = x + y^2$ . Encontre, então, a função composta  $f \circ g$  e seu domínio.

### Solução

Da Definição 4, tem-se que uma função composta  $f \circ g$  é obtida da seguinte forma:

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

Então, utilizando as funções informadas:

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = \ln(g(x, y)) + 2(g(x, y))$$

$$(f \circ g)(x, y) = \ln(x + y^2) + 2(x + y^2)$$

Para o domínio da função composta, note que  $g(x, y)$  é definida para todos os pares ordenados reais. No entanto, a função  $f(t)$  só está definida para os casos em que  $t > 0$ , pois o logaritmo natural de um número só está definido para valores maiores que zero. Portanto, o domínio dessa função composta será o conjunto  $D = \{(x, y) | x + y^2 > 0\}$ .

---

Um dos tipos mais comuns de funções que se têm são as **funções polinomiais**. No caso das funções com duas variáveis, Leithold (1994) considera que uma função polinomial com duas variáveis é simplesmente a soma de  $r$  termos  $cx^n y^m$ , sendo  $c$  um número real e  $m$  e  $n$  inteiros não negativos. Para uma função polinomial com duas variáveis, tem-se que o grau do polinômio será determinado pelo maior valor de uma soma  $m + n$  de termos que apresentem  $c \neq 0$ .

Ilustrando uma função polinomial, considere a função polinomial  $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 y^3 + y$ ; o grau desse polinômio será igual a 5, pois é o maior valor de soma  $m + n$ . Agora, se a função fosse  $f(x, y) = x^6 + 2x^3 y^2 + y^3$ , o grau do polinômio seria igual a 6 – lembre-se que o zero é considerado um número inteiro, logo,  $x^6 = x^6 \cdot y^0$ , então  $m + n = 6$ .

### Gráficos de funções com duas variáveis

Quando temos em mãos apenas uma variável real, esta pode ser representada geometricamente (ou graficamente) apenas com o uso de uma reta, a reta numérica real.

Tal reta é uma forma de representar o conjunto de todos os números reais (STEWART, 2017a).

Durante os estudos de *funções com uma única variável*, a representação geométrica passou a ser feita no **plano cartesiano**, que é duas retas numéricas reais perpendiculares, sendo uma reta horizontal, conhecida como **eixo das abscissas**, e uma reta vertical, o **eixo das ordenadas**. Tais retas se cruzam na **origem O**, como nos mostra a Figura 1.12.

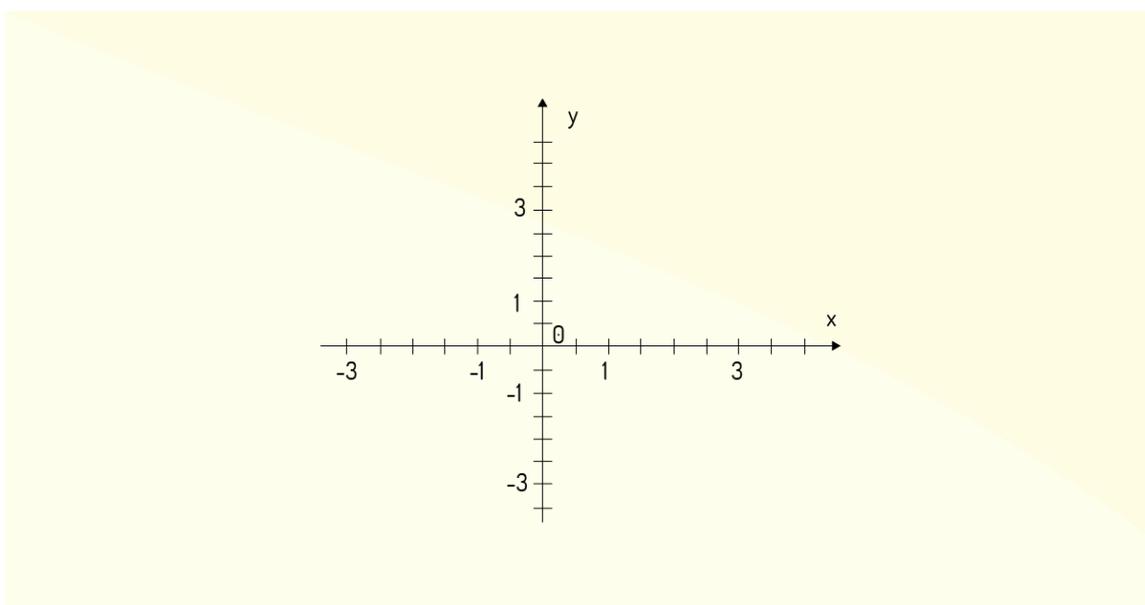


Figura 1.12 - Representação geométrica do plano cartesiano

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ainda de acordo com Stewart (2017a), a representação geométrica de uma função com uma variável  $f(x)$  consiste simplesmente em representar no plano cartesiano o conjunto de pares ordenados  $(x, f(x))$  para todo o domínio de uma função, ou seja, apresentar em forma gráfica o conjunto  $\{(x, f(x)) | x \in D\}$  ou  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x) \text{ e } x \in \mathbb{R}\}$ .

Para o nosso caso de interesse no momento, que são funções com duas variáveis, a definição da representação geométrica pode ser análoga à descrita acima, com a ressalva de que os pontos de uma função com duas variáveis são pertencentes a  $\mathbb{R}^3$ . Então, tal qual define Leithold (1994):

**Definição 5:** o gráfico de uma função  $f$  de duas variáveis será o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  pertencentes a  $\mathbb{R}^3$  para os quais se têm que  $(x, y)$  são pontos do domínio de  $f$  e  $z = f(x, y)$ .

Então, o gráfico de uma função de duas variáveis é simplesmente a representação no espaço tridimensional do conjunto de triplas ordenadas  $(x, y, f(x, y))$  para todo o domínio de uma função. Para a representação gráfica de funções com duas variáveis, você pode fazer uso de uma versão adaptada do plano cartesiano na qual se adiciona uma terceira reta numérica representando o eixo  $z$ , como mostra a Figura 1.13.

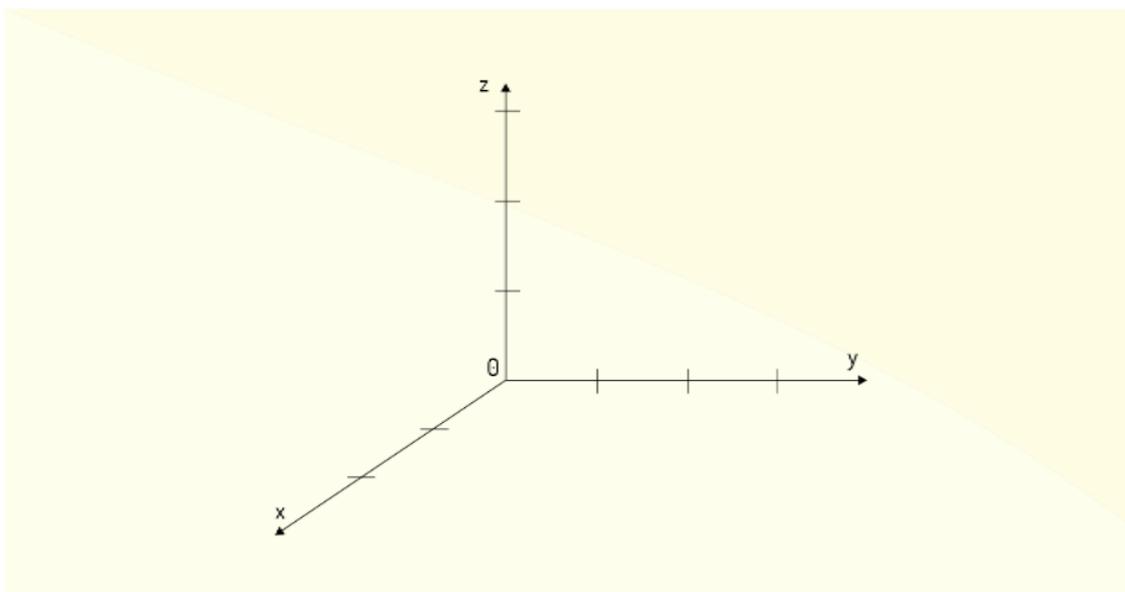


Figura 1.13 - Representação geométrica do espaço tridimensional

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que a Figura 1.13 não apresenta a única forma de representarmos um eixo tridimensional! Existem diferentes formas, sendo que a escolha de qual você deve usar depende simplesmente de você e do que deseja enfatizar graficamente.

Como os gráficos tridimensionais nem sempre são simples de se construir manualmente, a seguir serão indicados alguns exemplos de representações gráficas de algumas funções com duas variáveis comuns.

**Exemplo 2.3:** Considere a função  $z = f(x, y) = 4 - x - 2y$ . Para representá-la graficamente, o primeiro passo é identificar as interseções com os eixos. Isso é encontrado

avaliando  $f(0,0)$ , para a interseção em  $z$ ; fazendo  $y = z = 0$  para a interseção em  $x$ ; e fazendo  $x = z = 0$  para a interseção em  $y$ . Com isso, encontra-se que a interseção em  $z$  será em 4, a interseção em  $x$  será em 4 e a interseção em  $y$  será em 2. Fazendo, então, cada uma das variáveis ser igual a zero, você encontrará os traços do gráfico dessa função. Assim, quando  $y = 0$ ,  $z = 4 - x$ ; quando  $x = 0$ ,  $z = 4 - 2y$ ; e quando  $z = 0$ ,  $x = 4 - 2y$ . Veja que todos os traços são lineares. Basta, então, unir os pontos linearmente, como mostra a Figura 1.14.

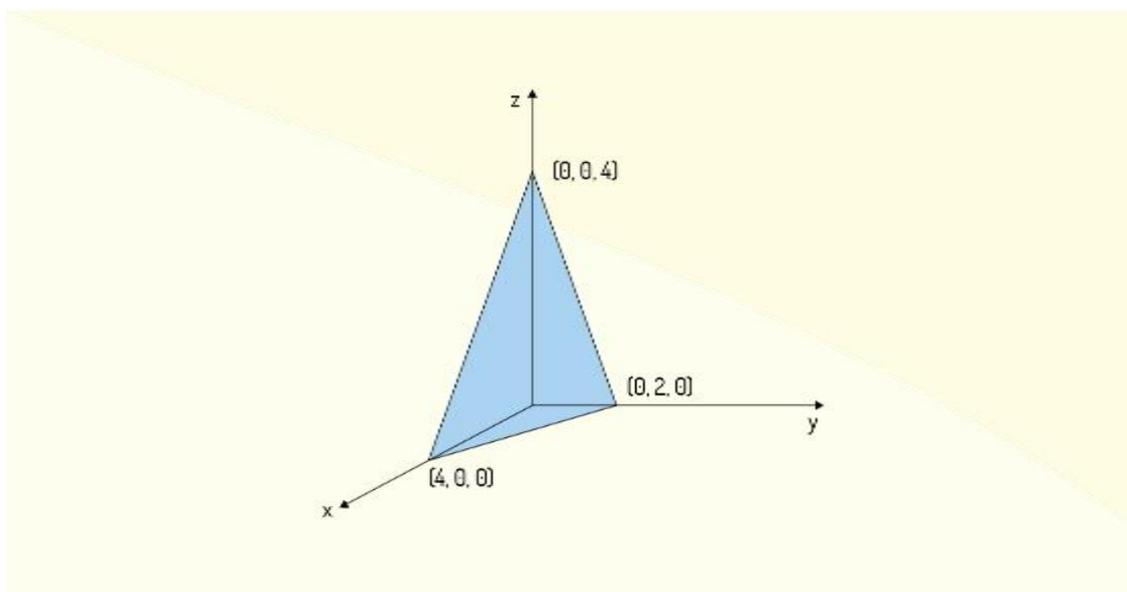


Figura 1.14 - Representação gráfica da função  $z = 4 - x - 2y$

Fonte: Adaptado de Morettin, Hazzan e Bussab (2016, p. 240).

**Exemplo 2.4:** Considere a função  $z = f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ . Veja que essa função pode ser elevada ao quadrado, resultando em  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , que é a equação de uma esfera. No entanto, como a função indicada irá retornar apenas valores positivos para  $z$ , ela representa apenas o hemisfério superior de uma esfera com um raio de  $r$  unidades de comprimento, centrado na origem do espaço tridimensional e que toca o plano  $xy$ . A Figura 1.15 mostra o gráfico de uma função desse tipo.

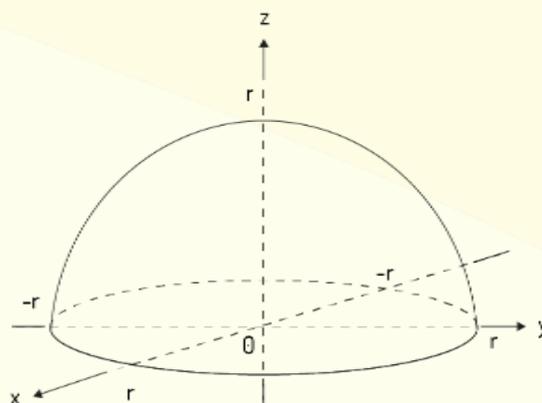


Figura 1.15 - Representação gráfica da função  $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

Fonte: Adaptado de Leithold (1994, p. 912).

Note que você não será capaz de representar uma esfera graficamente apenas com uma função de  $x$  e  $y$ . Para a representação do hemisfério superior, você usa a função  $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ . Para o hemisfério inferior, você deve utilizar a função  $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ .

Ainda, caso você queira uma esfera que não apresente seu centro na origem do espaço tridimensional, você deverá adicionar a coordenada desejada do centro como um ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  à equação da seguinte forma:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

**Exemplo 2.5:** Considere a função  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ . Para esboçá-la graficamente, precisamos identificar eventuais interseções. Note que não haverá valores negativos em  $z$  para essa função, logo, seu gráfico estará totalmente acima da origem. O valor mínimo para ela é facilmente obtível – será  $f(0,0) = 0$ . Agora, para os traços dessa função, veja que quando  $y = 0$ ,  $z = x^2$ , quando  $x = 0$ ,  $z = y^2$  e quando  $z = 0$ ,  $y^2 = -x^2$ . Se você analisar o caso de  $z = 0$ , verá que o traço resultante é  $x^2 + y^2 = 0$ , que é semelhante à equação da circunferência. Logo, se olharmos o gráfico dessa função “do topo” do eixo

z, visão esta que seria a do plano  $xy$ , veríamos um gráfico circular de raio é igual a  $\sqrt{z}$ . Já quando se tem  $x = 0$  ou  $y = 0$ , os traços serão parábolas. Logo, unindo essas informações, pode-se esboçar o gráfico da função dada, como mostra a Figura 1.16.

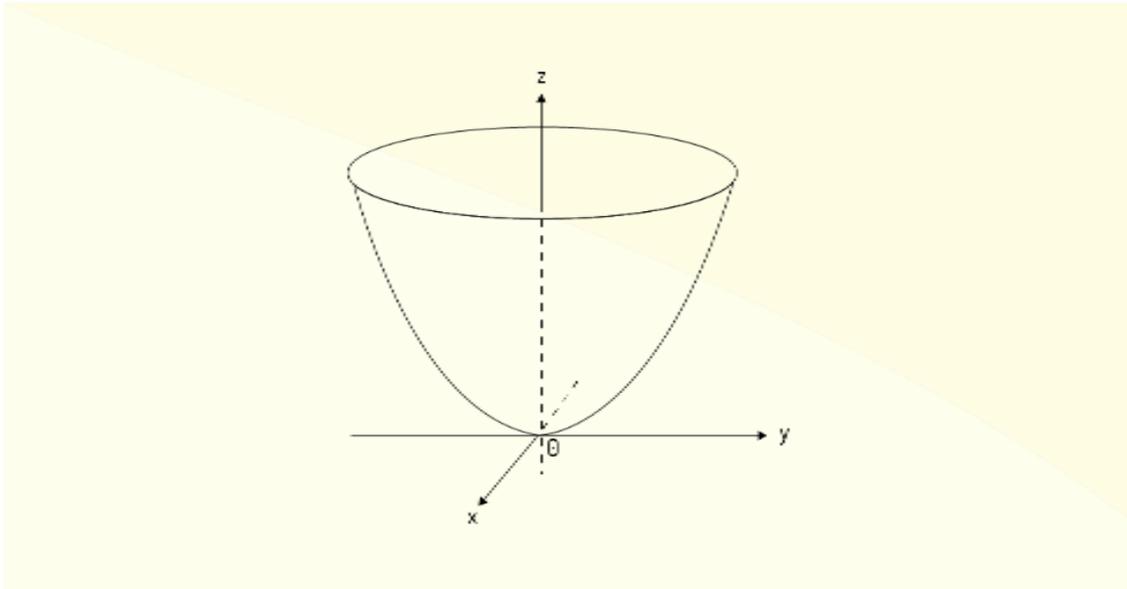


Figura 1.16 - Representação gráfica da função  $z = x^2 + y^2$

Fonte: Adaptado de Leithold (1994, p. 912).

Você também pode exercitar um pouco de sua imaginação com este gráfico. Como seus traços laterais são parábolas e a visão do eixo  $z$  em direção ao plano  $xy$  consiste de um círculo de raio  $\sqrt{z}$ , para encontrar este gráfico, basta que você tome uma das parábolas dos traços e faça ela “girar” ao redor do eixo  $z$ .

Ainda sobre esta função, escrevendo-a na forma  $z = a + x^2 + y^2$ , o valor  $a$  irá indicar o mínimo da função, ou seja, o ponto mais baixo que o gráfico deverá atingir no eixo  $z$ .

### **Curvas de nível**

Apesar dos exemplos vistos anteriormente serem relativamente simples, existem vários casos mais complexos de gráficos de funções com mais de uma variável, para os quais a visualização pode, inclusive, ser prejudicada. Nesse caso, pode ser útil que busquemos uma outra forma de representarmos graficamente as funções de duas variáveis.

Da forma como apresentamos o eixo  $z$  na representação de um espaço tridimensional e também na definição de uma função com duas variáveis, somos capazes de determinar uma maneira diferente de visualizarmos tais gráficos. Tal método é semelhante ao método de representar uma paisagem tridimensional com um mapa topológico (LEITHOLD, 1994).

Seja o gráfico de uma função  $z = f(x, y)$  qualquer. Considere, agora, um plano paralelo ao plano  $xy$ . Esse plano, que é ortogonal ao eixo  $z$ , representa um valor constante da função, ou seja, delimita uma região em que se tem  $z = f(x, y) = c$ . Essa região do espaço, em que se terá sempre pontos  $(x, y, c)$ , é chamada **curva de nível** da função (LEITHOLD, 1994).

Como exemplo, para ilustrarmos o que é uma curva de nível, considere a função  $z = f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ . Observe que essa função é semelhante à mostrada no Exemplo 2.5, diferindo nos sinais das variáveis e apresentando uma constante, a qual indica o valor máximo positivo dessa função. Já os sinais negativos em  $x^2$  e  $y^2$  indicam que as parábolas dos traços serão opostas àquelas mostradas na Figura 1.16. Logo, o gráfico esperado para a função  $z = 100 - x^2 - y^2$  é basicamente oposto ao mostrado na Figura 1.16.

Considere, agora, um plano  $\alpha$  localizado em  $z = 75$  no gráfico da função  $z$  indicada no parágrafo anterior. Esse plano delimita uma região em que todos os pontos do gráfico apresentam valor igual a 75, ou seja, tem-se que, em tal plano,  $75 = 100 - x^2 - y^2$ . Reescrevendo essa função, você encontrará a função  $x^2 + y^2 = 25$ , que descreve uma circunferência de raio igual a  $\sqrt{25} = 5$ , localizada na origem do plano cartesiano. Assim, como a função  $z$  foi descrita num plano  $\alpha$ , ela é uma bidimensional; logo, podemos projetar essa função no plano  $xy$ , de modo que encontramos todos os pares ordenados  $(x, y)$  que satisfazem a condição de  $z = 75$  estabelecida inicialmente, ou seja, podemos projetar no plano  $xy$  a curva de nível de  $z$  em que se tem  $z = 75$ . Na Figura 1.17, podemos ver todo esse desenvolvimento para encontrar tal curva de nível no gráfico da função.

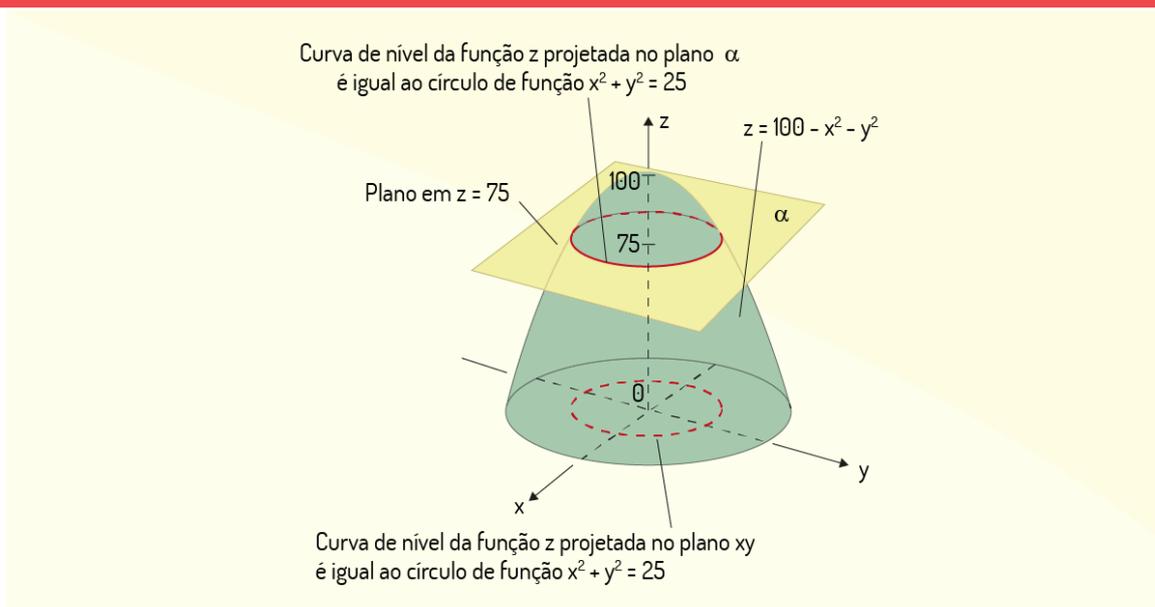


Figura 1.17 - Representação gráfica da função  $z = x^2 + y^2$

Fonte: Adaptado de Thomas Júnior (2016, p. 798).

Agora podemos representar uma função com duas variáveis de forma bidimensional. Se você tomar diferentes curvas de nível em diferentes valores de  $z$ , você terá diversas curvas representadas no plano cartesiano, para as quais se tem  $z$  igual a uma constante determinada previamente.

**Exemplo 2.6:** Considerando ainda a função  $z = 100 - x^2 - y^2$ , esboce as projeções das curvas de nível para  $z = 0$ ,  $z = 36$ ,  $z = 51$ ,  $z = 75$ ,  $z = 91$  e  $z = 99$ .

### Solução

Como cada curva de nível apresenta um valor constante para  $z$ , basta que a função seja reescrita para que encontremos a curva de nível em cada caso. Assim:

- para  $z = 0$ , tem-se  $0 = 100 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 100$ ;
- para  $z = 36$ , tem-se  $36 = 100 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 64$ ;
- para  $z = 51$ , tem-se  $51 = 100 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 49$ ;
- para  $z = 75$ , tem-se  $75 = 100 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$ ;
- para  $z = 91$ , tem-se  $91 = 100 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 9$ ;
- para  $z = 99$ , tem-se  $99 = 100 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$ .

Como já analisamos anteriormente a projeção de uma curva de nível no plano  $xy$ , sabemos que cada uma dessas projeções deve ser um círculo. Analisando as funções obtidas acima:

- para  $z = 0$ , tem-se  $x^2 + y^2 = 100$ , que é um círculo de raio 10;
- para  $z = 36$ , tem-se  $x^2 + y^2 = 64$ , que é um círculo de raio 8;
- para  $z = 51$ , tem-se  $x^2 + y^2 = 49$ , que é um círculo de raio 7;
- para  $z = 75$ , tem-se  $x^2 + y^2 = 25$ , que é um círculo de raio 5;
- para  $z = 91$ , tem-se  $x^2 + y^2 = 9$ , que é um círculo de raio 3;
- para  $z = 99$ , tem-se  $x^2 + y^2 = 1$ , que é um círculo de raio 1.

A projeção dessas curvas de nível é apresentada na Figura 1.18.

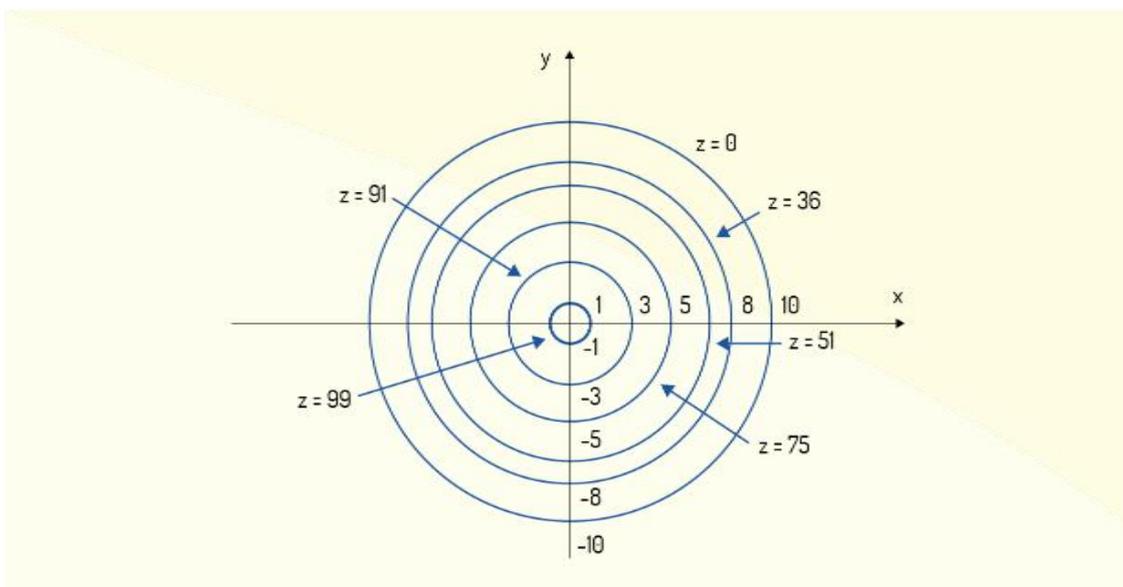


Figura 1.18 - Curvas de nível da função  $z = 100 - x^2 - y^2$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, cada círculo da Figura 1.18 apresenta todos os pares ordenados  $(x, y)$  que, quando aplicados na função dada, geram um resultado igual à constante que se arbitrou como valor de  $z$ .

## FIQUE POR DENTRO

Trabalhar com gráficos de funções com mais de uma variável pode não ser uma tarefa tão simples de se realizar manualmente. No entanto, temos diversos *softwares* que podem ser utilizados para a produção de gráficos. Logo, caso você necessite trabalhar com gráficos de funções com mais de uma variável que não se mostrem tão simples de visualizar ou desenhar, busque tais *softwares* e pratique seu manuseio. Você verá que o manuseio e a visualização de problemas desse tipo se tornarão bem mais simples. Sugestões de *softwares*:

- R (<<https://www.r-project.org/>>): usa linhas de comando e apresenta diversos usos em várias áreas. É gratuito e *software* livre.
- MATLAB (<<https://www.mathworks.com/products/matlab.htm>>): semelhante ao R, mas apresenta várias bibliotecas pré-prontas e de fácil acesso para trabalho com gráficos. É pago.
- GNU Octave (<<https://www.gnu.org/software/octave/>>): conhecido como a versão “livre” do MATLAB, por ser muito semelhante ao pago, mas apresenta código aberto.

Finalizando a análise gráfica de funções com mais de uma variável, Flemming e Gonçalves (2005) ainda ressaltam que as curvas de nível podem ser empregadas para se esboçar o gráfico de uma função de duas variáveis. Como cada curva de nível faz parte de um plano paralelo ao plano  $xy$ , indicando uma região em que a função  $z$  apresenta um valor constante igual a  $c$ , você pode empilhar uma série de curvas de nível em diferentes alturas do eixo  $z$ , unindo, em seguida, as bordas dessas curvas de nível, sempre respeitando o traço dos eixos  $x$  e  $y$ .

## ATIVIDADE

- 2) Funções com mais de uma variável são comuns quando se usa o cálculo para estudos de fenômenos mais complexos. Visando fixar seu aprendizado sobre as funções com mais de uma variável, analise as alternativas a seguir e assinale a correta.
- a) Analisando a função de estado de um gás ideal,  $PV = nRT$ , ao dobrar a temperatura  $T$  e o volume  $V$  se mantendo  $n$  constante, a pressão  $P$  irá quadruplicar.
- b) As curvas de nível da função  $z = 3 - 6x - 3y$  serão funções lineares do tipo  $y = \frac{(3-z)}{3} - 2x$ .
- c) O domínio e a imagem da função  $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2+3}$  são  $\mathbb{R}^3$ .
- d) A função  $w = 4 - r^2 - t^2$  apresenta como máximo em  $w$  o valor 4 e sua curva de nível em  $w = 0$  é uma circunferência de raio igual a 4 e centro na origem do eixo  $rt$ .
- e) O domínio e a imagem da função  $f(x, y) = \ln(5 - \sqrt{x^2 + y^2})$  são o conjunto  $\{x, y \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 25\}$ .

## LIMITE DE UMA FUNÇÃO COM VÁRIAS VARIÁVEIS

Agora, podemos, finalmente, direcionar nossos estudos para o Cálculo. Após analisar os conceitos de funções com mais de uma variável, iremos estudar a respeito do limite de uma função com mais de uma variável.

Segundo Morettin, Hazzan e Bussab (2016), todas as mesmas noções de limite vistas para o caso de funções com uma variável também são válidas para o caso de funções com mais de uma variável. Logo, convém propor inicialmente uma definição intuitiva para o limite no caso de funções com duas variáveis.

Assim, Morettin, Hazzan e Bussab (2016) afirmam que se o valor da função  $z = f(x, y)$  tender a um determinado valor  $L$  quando o par ordenado  $(x, y)$  se aproxima arbitrariamente de um ponto  $(x_0, y_0)$ , mas jamais sendo igual a  $(x_0, y_0)$ , esse valor  $L$  é considerado o limite da função quando  $(x, y)$  tende a  $(x_0, y_0)$ . Note que os valores do par ordenado devem sempre pertencer ao domínio da função. Simbolicamente, isso pode ser representado da seguinte forma:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad (7)$$

Essa ideia de “se aproxima arbitrariamente de um ponto, sem jamais ser igual a esse ponto” é algo que alguns podem ter dificuldade em compreender. Flemming e Gonçalves (2005) consideram que essa frase pode ser representada matematicamente da seguinte forma:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad (8)$$

O valor  $\varepsilon$  indicado é sempre um número positivo, sendo ele tão pequeno quanto você puder imaginar.

Note que, dada essa definição mais informal, você é capaz de avaliar numericamente os limites de uma função de mais de uma variável assim como se faz com as funções de uma única variável. Ou seja, basta ir aproximando as variáveis por diferentes combinações.

### Algumas definições

Para chegarmos a uma definição mais acurada matematicamente do limite de uma função com duas variáveis, Leithold (1994) parte da definição da distância entre dois pontos.

Retomando o que foi visto no início desta Unidade, sendo os pontos  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , ambos pertencentes a  $\mathbb{R}^n$ , a distância  $d_{PA}$  pode ser avaliada utilizando a Equação (6), de modo que você encontrará que:

$$d_{PA} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} \quad (9)$$

Note que  $d_{PA}$ , também representado como  $\|P - A\|$ , sempre será um número positivo, visto que ele avalia uma distância. Da distância entre dois pontos, Leithold (1994) apresenta duas definições:

**Definição 6:** sendo  $A$  um ponto de  $\mathbb{R}^n$  e  $r$  um número qualquer real e positivo, o conjunto de todos os pontos  $P \in \mathbb{R}^n$ , tais que se tenha  $\|P - A\| < r$ , é chamado **bola aberta**  $B(A; r)$ ;

**Definição 7:** sendo  $A$  um ponto de  $\mathbb{R}^n$  e  $r$  um número qualquer real e positivo, o conjunto de todos os pontos  $P \in \mathbb{R}^n$ , tais que se tenha  $\|P - A\| \leq r$ , é chamado **bola fechada**  $B[A; r]$ .

Mas por que a denominação de bola para essas distâncias? Flemming e Gonçalves (2005) dizem que isso deriva da forma geométrica das representações das definições 6 e 7. Por exemplo, se  $A \in \mathbb{R}^2$ , então a bola aberta  $B(A; r)$ :

$$B(A; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\} \quad (10)$$

Note que (10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$B(A; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\} \quad (11)$$

Veja que a condição indicada em (11) é a equação de uma circunferência de raio  $r$  e centro em um ponto  $A_0 = (x_0, y_0)$ . Ou seja, a bola aberta  $B(A; r)$  para  $A \in \mathbb{R}^2$  é o conjunto de todos os pontos contidos no interior da circunferência de raio  $r$  e centro em um ponto  $A_0 = (x_0, y_0)$ , descartando os pontos que delimitam a circunferência.

Já para o caso de  $A \in \mathbb{R}^3$ , você encontrará

$$B(A; r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\} \quad (12)$$

ou:

$$B(A; r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\} \quad (13)$$

Assim, a condição mostrada em (13) não descreve uma esfera de raio  $r$  e centro em um ponto  $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Logo, a bola aberta  $B(A; r)$  para  $A \in \mathbb{R}^3$  indica todos os pontos contidos no interior de uma esfera de raio  $r$  e centro em um ponto  $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , descartando os pontos que delimitam a esfera. A Figura 1.19 ilustra esses casos.

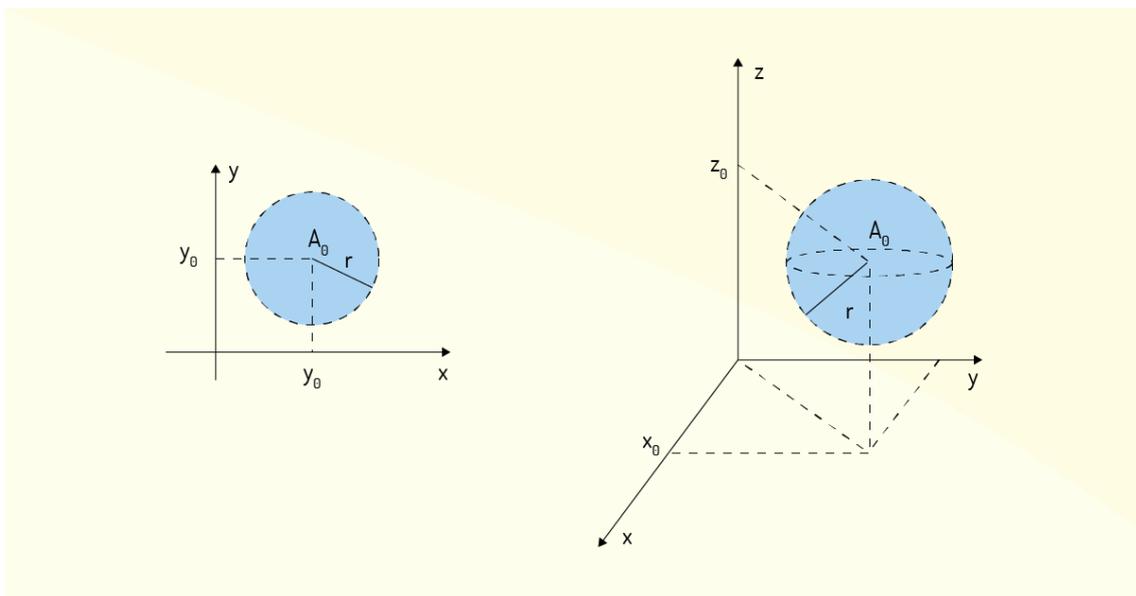


Figura 1.19 - Representação geométrica de uma bola aberta em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 70).

O mesmo pode ser estendido para o conceito de bola fechada, com a diferença que os pontos que delimitam a circunferência ou a esfera são incluídos.

Essa definição de bola aberta e bola fechada remete à definição de intervalos abertos e intervalos fechados. Para ilustrar essa semelhança, Leithold (1994) considera o espaço unidimensional  $\mathbb{R}$ . A bola aberta  $B(a; r)$  apresenta o conjunto de todos os valores  $x$  para os quais se tem que  $|x - a| < r$ . Ou seja, a distância  $|x - a|$  pode ser tomada infinitesimalmente próxima a um valor  $r$ , mas jamais pode ser igual a  $r$ . Logo, a bola aberta  $B(a; r)$  é um intervalo aberto. De forma análoga, a bola fechada  $B[A; r]$  apresenta o conjunto de todos os valores  $x$  para os quais se tem que  $|x - a| \leq r$ , de modo que a

distância  $|x - a|$  pode ser igual a  $r$ , o que caracteriza a bola fechada como um intervalo fechado.

Uma outra definição que se mostrará útil adiante, dada por Flemming e Gonçalves (2005), é a de **ponto interior**. Tal definição será aplicada apenas a conjuntos pertencentes a  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 8:** seja, então,  $A$  um conjunto pertencente a um desses espaços. Um ponto  $P \in A$  será dito ponto interior do conjunto  $A$  se existir uma bola aberta centrada em  $P$  e contida no conjunto  $A$ . Agora, se todos os pontos  $P \in A$  são pontos interiores de  $A$ , o conjunto  $A$  é, então, denominado **aberto**.

É interessante notar que um conjunto aberto no plano ou no espaço simplesmente é o domínio de uma função. Na Figura 1.20 são mostrados exemplos de pontos interiores e conjuntos abertos no plano e no espaço.

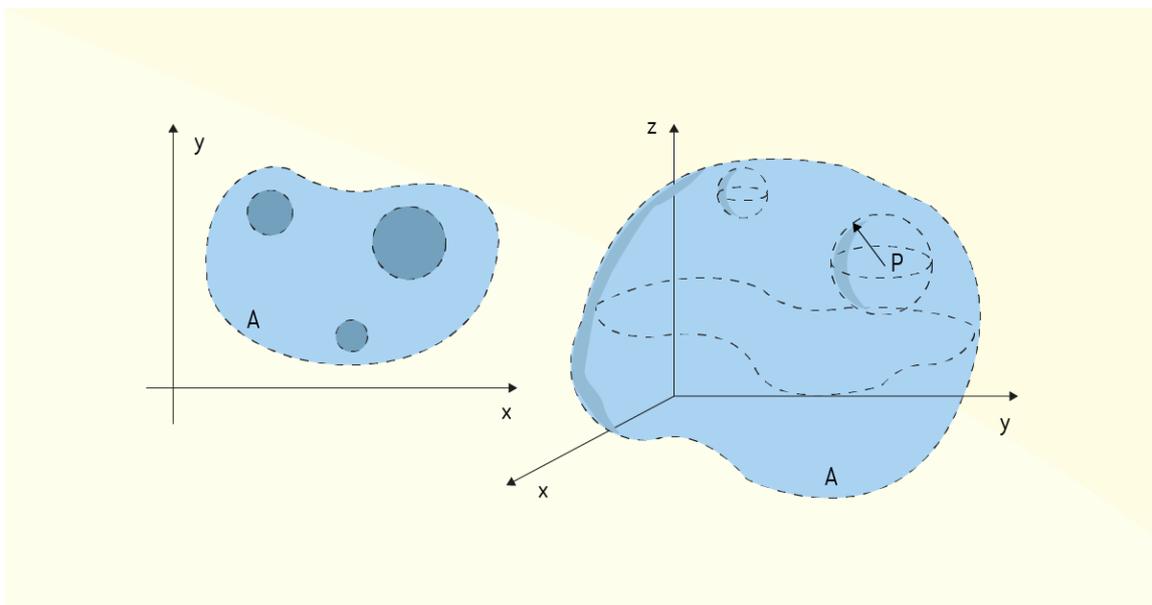


Figura 1.20 - Representação geométrica de pontos interiores em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 70).

Aproveitando a mesma definição do ponto  $P \in A$  usada para pontos interiores, sendo o conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$ , então, quando uma bola aberta centrada em  $P$  contiver pontos que pertencem a  $A$  e pontos que não pertencem a  $A$ , o ponto  $P$  é chamado **ponto de fronteira**

de  $A$ . Juntando todos os pontos de fronteira desse conjunto  $A$ , tem-se a fronteira de  $A$  (FLEMMING; GONÇALVES, 2005).

### Definindo formalmente o limite

Leithold (1994) usa a definição de bola aberta para uma definição mais formal do limite de funções com  $n$  variáveis:

**Definição 9:** considere a função de  $n$  variáveis  $f$  como sendo definida em uma bola aberta  $B(A; r)$ , exceto possivelmente no próprio ponto  $A$ . Diz-se, então, que o limite de  $f(P)$  quando  $P$  tende a  $A$  será igual ao valor  $L$ , ou seja,  $\lim_{P \rightarrow A} f(P) = L$ , se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um  $\delta > 0$  tal que, se

$$0 < \|P - A\| < \delta$$

então  $|f(P) - L| < \varepsilon$ .

Note que a Definição 9 pode ser facilmente reduzida ao caso de uma função de uma variável, pois, em tal caso, tem-se que  $P = x$  e  $A = a$ , resultando que, se  $f$  for definida em qualquer intervalo aberto cujo centro seja o ponto  $a$ , exceto possivelmente nesse ponto  $a$ , então o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  será igual ao valor  $L$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um  $\delta > 0$  tal que, se

$$0 < |x - a| < \delta,$$

então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

A Definição 9 pode ser, agora, aplicada ao caso de nosso interesse, que é a função com duas variáveis. De acordo com Leithold (1994):

**Definição 10:** seja o par ordenado  $A = (x_0, y_0)$  e a função de 2 variáveis  $f$  definida em uma bola aberta  $B(A; r)$ , exceto possivelmente no próprio ponto  $A$ . Diz-se, então, que o limite de  $f(x, y)$ , quando o par ordenado  $(x, y)$  tende a  $A = (x_0, y_0)$ , será igual ao valor  $L$ , ou seja,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$ , se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um  $\delta > 0$  tal que, se

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

então  $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ .

É interessante destacar que pelas definições de limites dadas aqui, não é necessário que a função esteja definida no ponto  $A$  para que o limite exista; basta que a função esteja definida para valores próximos desse ponto.

**Exemplo 3.1:** Usando a definição de limite de funções de duas variáveis apresentada, mostre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (2x + 5y) = 7$$

### Solução

Partindo da Definição 9, que temos para o limite de uma função com duas variáveis, para mostrar que o limite existe, é preciso mostrar que para todo  $\varepsilon > 0$  irá existir um  $\delta > 0$  tal que  $|f(x, y) - 7| < \varepsilon$  sempre que

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta$$

Da mesma forma que você deve ter desenvolvido quando trabalhou com o caso de limites de funções com uma única variável, pode-se buscar pistas para encontrar  $\delta$  a partir da desigualdade de  $\varepsilon$ . Assim, substituindo a função  $f(x, y)$  dada, encontra-se:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 7| < \varepsilon &\rightarrow |2x + 5y - 7| \\ &= |2x - 2 + 5y - 5| = |2(x - 1) + 5(y - 1)| \\ &= 2|x - 1| + 5|y - 1| \end{aligned}$$

Então, tem-se que  $|2x + 5y - 7| \leq 2|x - 1| + 5|y - 1|$ . Note agora que:

$$|x - 1| \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$$

$$|y - 1| \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$$

Logo, se  $0 < \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} < \delta$ , então  $2|x - 1| + 5|y - 1| < 2\delta + 5\delta$ .

Portanto, tem-se que uma escolha adequada para  $\delta$  será  $7\delta = \varepsilon$ , ou seja,  $\delta = \frac{1}{7}\varepsilon$ .

Utilizando, então, este valor de  $\delta$  em  $0 < \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} < \delta$ , tem-se que:

$$|2x + 5y - 7| \leq 2|x - 1| + 5|y - 1| < 2\delta + 5\delta$$

$$|2x + 5y - 7| \leq |2(x - 1) + 5(y - 1)| < 2\frac{1}{7}\varepsilon + 5\frac{1}{7}\varepsilon$$

$$|2(x - 1) + 5(y - 1)| < \frac{2}{7}\varepsilon + \frac{5}{7}\varepsilon$$

$$|2(x - 1) + 5(y - 1)| < \varepsilon$$

Então, tendo  $|2x + 5y - 7| < \varepsilon$ , demonstramos que para todo  $\varepsilon > 0$ , ao escolher um  $\delta = \frac{1}{7}\varepsilon$ , a Definição 9 será verdadeira. Provou-se, então, que o limite indicado no início é verdadeiro.

Ainda sobre a Definição 9, podemos encontrar uma distância entre  $f(x, y)$  e  $L$  tão pequena quanto desejarmos, desde que a distância do par ordenado  $(x, y)$  seja suficientemente pequena do ponto  $(x_0, y_0)$ , mas nunca nula. Ou seja, conforme Stewart (2017b) indica, essa é uma definição baseada apenas na distância entre pontos, não indicando nada sobre o sentido que devemos tomar para realizar essa aproximação. Assim, no caso do limite lateral de uma função de uma única variável, para que o limite de uma função exista, é preciso que a aproximação de  $(x, y)$  no sentido do ponto  $(x_0, y_0)$  leve sempre ao mesmo resultado  $L$ , independente de qual for o sentido utilizado para realizar a aproximação dos pontos. Caso usando aproximações de diferentes formas o limite estimado não seja o mesmo, então, entende-se que o limite da função em questão, quando  $(x, y)$  tende ao ponto  $(x_0, y_0)$ , não existe.

**Exemplo 3.2:** Mostre que o limite indicado a seguir não existe.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} \right)$$

### Solução

Para realizar a prova pedida, podemos partir da noção que temos de limites laterais. Assim, vamos analisar como se dá a aproximação da função ao ponto  $(0,0)$ . Isso pode ser feito analisando a aproximação em cada coordenada separadamente, deixando a outra coordenada fixa.

Por exemplo, iniciemos analisando o que ocorre com os valores da função dada ao longo do eixo  $x$ . Escolha um valor para manter a coordenada  $y$  fixa, até mesmo o valor do ponto

no qual se deseja calcular o limite; então, fazendo  $y = 0$ , veja que, para qualquer valor de  $x$ , você terá:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{x^3 - 0^3}{x^3 + 0^3} = \frac{x^3}{x^3} = 1$$

Ou seja, aproximando a função ao longo do eixo  $x$ , para todos os valores reais diferentes de zero, a função irá tender a 1. Logo, podemos dizer que  $f(x, y) \rightarrow 1$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo do eixo  $x$ .

Repetindo o mesmo procedimento, mas agora fixando o valor da coordenada  $x$  em zero, você encontrará:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{0^3 - y^3}{0^3 + y^3} = \frac{-y^3}{y^3} = -1$$

Veja que ao aproximar a função ao longo do eixo  $y$ , para todos os valores reais diferentes de zero, a função dada irá tender à -1, ou seja,  $f(x, y) \rightarrow -1$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo do eixo  $y$ .

Como as aproximações do ponto  $(0, 0)$  feitas para a dada função não levam ao mesmo valor, então podemos concluir que o limite informado não existe.

Também é possível formalizar esse cálculo de limite lateral para funções com mais de uma variável, como indicam Leithold (1994) e Flemming e Gonçalves (2005). Para tal, é necessário mais uma definição ser enunciada, a de **ponto de acumulação**:

**Definição 11:** seja o conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  e o ponto  $P_0$ . O ponto  $P_0$  será chamado de ponto de acumulação se toda bola aberta centrada em  $P_0$  conter uma infinidade de pontos de  $A$ .

Como exemplo de pontos de acumulação, considere o conjunto  $A$  que consiste de todos os pontos do 1º e 4º quadrantes, ou seja, todos os pontos do plano para  $x \geq 0$ . A bola aberta centrada na origem do plano cartesiano  $B(O; r)$  será um ponto de acumulação, mesmo que apenas metade da circunferência esteja localizada em  $A$ , pois é possível identificar uma infinidade de pontos de  $A$  dentro de  $B(O; r)$  (LEITHOLD, 1994).

Outro exemplo de ponto de acumulação, dado por Flemming e Gonçalves (2005), é o seguinte: seja o conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} < 1\}$ , ou seja,  $A$  é uma circunferência de origem  $(1, 2)$  e raio 1. Note que todos os pontos de  $A$ , incluindo os que delimitam a circunferência, são pontos de acumulação. Mesmo a origem  $(1, 2)$ , que não pertence a  $A$ , também é um ponto de acumulação de  $A$ . Apenas pontos externos ao conjunto não serão pontos de acumulação, como se pode ver na Figura 1.21.

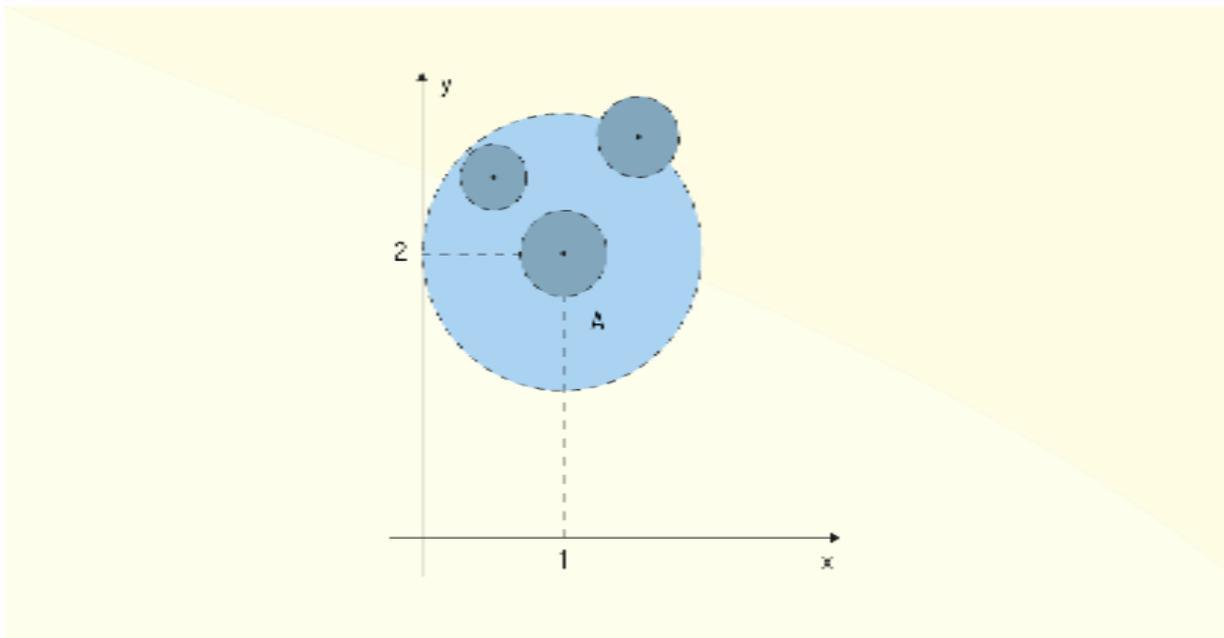


Figura 1.21 - Pontos de acumulação do conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} < 1\}$

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 74).

Agora, com essas definições formalizadas, Leithold (1994) enuncia a seguinte definição, relativa a limites laterais para funções de duas variáveis:

**Definição 12:** seja a função  $f$  definida no conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e o ponto de acumulação de  $A$ ,  $P_0 = (x_0, y_0)$ , então o limite de  $f(x, y)$ , quando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  em  $A$ , será o número real  $L$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um  $\delta > 0$  tal que, se

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

então  $|f(x, y) - L| < \varepsilon$  e  $(x, y)$  pertence a  $A$ .

Partindo da Definição 12, pode ser possível que o limite a ser calculado se torne o limite de uma função de uma única variável. Leithold (1994) indica os seguintes exemplos; considerando  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , então:

i. se  $A_1$  for o conjunto de todos os pontos do lado positivo do eixo  $x$ , então,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0);$$

ii. se  $A_2$  for o conjunto de todos os pontos do lado negativo do eixo  $y$ , então,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(0, y);$$

iii. se  $A_3$  for o conjunto de todos os pontos no eixo  $x$ , então,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0);$$

iv. se  $A_4$  for o conjunto de todos os pontos sobre uma parábola  $y = x^2$ , então,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, x^2).$$

Assim, se a função  $f(x, y)$  apresentar diferentes limites quando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  por meio de dois conjuntos distintos que contenham o ponto de acumulação  $(x_0, y_0)$ , então, Leithold (1994) diz que o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  não irá existir.

Nem sempre é uma tarefa simples identificar os conjuntos adequados para checar se um dado limite existe. Logo, um pouco de prática é necessário para identificar tais pontos de forma simples e dinâmica.

## ATIVIDADE

- 3) A definição de limites exige um bom domínio de conceitos, como a identificação de um conjunto como bola aberta, que consiste em encontrar uma equação da circunferência para  $\mathbb{R}^2$  ou de uma esfera para  $\mathbb{R}^3$ . Sendo assim, buscando fixar essas definições mais básicas, úteis para a definição de um limite, analise as alternativas a seguir e assinale a correta.
- a) O conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4y < 8\}$  é bola aberta com centro em  $(0, 2)$  e raio 4.
  - b) O conjunto  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + 8z < 25\}$  é uma bola aberta com centro em  $(0, 0, -4)$  para  $\mathbb{R}^3$  e raio 3.
  - c) O conjunto  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$  é uma bola aberta com centro em  $(0, 0, 0)$  para  $\mathbb{R}^3$ .
  - d) O conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 > 0\}$  é uma bola aberta com centro em  $(0, 1)$  para  $\mathbb{R}^2$ .
  - e) O conjunto  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z < 16\}$  é uma bola aberta com centro em  $(0, 0, 0)$  para  $\mathbb{R}^3$  e raio igual a 4.

## PROPRIEDADES DOS LIMITES E CONTINUIDADE

Aprimorando, agora, o estudo de limites com mais de uma variável, veremos uma série de propriedades, não tão novas, que podem facilitar seu trabalho. Todas as propriedades apresentadas para limites de funções com uma única variável também são válidas para os limites de funções com mais de uma variável. Thomas Júnior (2016) apresenta, então, um resumo de todas as propriedades para limites de funções com mais de uma variável. Para que tais propriedades sejam apresentadas, considere os números reais  $L$ ,  $M$  e  $k$  e que os limites  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = M$  existem.

- 1. Regra da soma:** o limite de uma função  $h = f(x, y) + g(x, y)$ , quando o par ordenado tende a  $(x_0, y_0)$ , será a soma dos limites de  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , ou seja:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L + M$$

**2. Regra da diferença:** é semelhante à regra da soma, alterando apenas o sinal.

Assim, sendo a função  $h = f(x, y) - g(x, y)$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x, y) - g(x, y)) =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) - \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L - M$$

**3. Regra da multiplicação por constante:** o limite de uma função  $kf(x, y)$ , ou seja, uma função multiplicada por um número real qualquer, é igual ao produto dessa mesma constante pelo limite da função:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} kf(x, y) = k \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = kL$$

**4. Regra do produto:** o limite de uma função  $h = f(x, y) \cdot g(x, y)$ , quando o par ordenado tende a  $(x_0, y_0)$ , será o produto dos limites de  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , ou seja:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x, y) \cdot g(x, y)) =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L \cdot M$$

**5. Regra do quociente:** o limite de uma função  $h = f(x, y)/g(x, y)$ , quando o par ordenado tende a  $(x_0, y_0)$ , será o quociente dos limites de  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , dado que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) \neq 0$ , ou seja:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left( \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y)} = \frac{L}{M}$$

**6. Regra da potência:** o limite de uma função  $h = [f(x, y)]^n$ , em que  $n$  é um número inteiro e positivo, quando o par ordenado tende a  $(x_0, y_0)$ , será igual ao limite de  $f(x, y)$  elevado à potência  $n$ , ou seja:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x, y)]^n = L^n$$

**7. Regra da raiz:** assim como a regra da potência, o limite de uma função  $h = [f(x, y)]^{1/n} = \sqrt[n]{f(x, y)}$ , em que  $n$  é um número inteiro e positivo, quando o par ordenado tende a  $(x_0, y_0)$ , será igual ao limite de  $f(x, y)$  elevado à potência  $1/n$ ,

ou seja:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$$

Observe que, na regra da raiz, caso  $n$  seja par, assume-se que o valor de  $L$  é par. Também deve-se ficar atento que, no caso de  $n$  ser par, é necessário que  $f(x,y)$  também seja maior ou igual a zero.

### Limites e indeterminações

Assim como nos casos de limites de funções de uma única variável, você deve tomar cuidado em relação a casos de indeterminações. Por exemplo, considere as funções de duas variáveis  $f$  e  $g$ , tais que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = 0$$

Se você aplicasse de forma direta a regra do quociente, você se veria incapaz de determinar o limite de  $h = f/g$  quando  $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ . Em tal situação, Fleming e Gonçalves (2005) afirmam que, dependendo de como sejam as funções  $f$  e  $g$ , você poderá encontrar que o limite de  $h = f/g$  quando  $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$  for um número real ou até confirmar que esse limite não existe. Para exemplificar melhor esse caso de indeterminação, Fleming e Gonçalves (2005) apresenta o seguinte exemplo.

**Exemplo 4.1:** Calcule o limite a seguir.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \left( \frac{x^3 + x^2y - 2xy - 2x^2 - 2x + 4}{xy + x - 2y - 2} \right)$$

### Solução

Vamos verificar, primeiro, o limite do numerador e do denominador individualmente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (x^3 + x^2y - 2xy - 2x^2 - 2x + 4) = 8 + 4 - 4 - 8 - 4 + 4 = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (xy + x - 2y - 2) = 2 + 2 - 2 - 2 = 0$$

Agora, se aplicarmos a regra do quociente à função dada, encontraremos a indeterminação  $0/0$ . Da definição de tal regra, já sabíamos que não seria possível aplicá-la, pois o denominador seria 0.

Para lidar com tal limite, no entanto, você pode realizar uma manipulação matemática nas funções. Por exemplo, você pode reescrever a primeira expressão como:

$$x(x^2 + xy - 2) - 2(x^2 + xy - 2) = (x - 2)(x^2 + xy - 2),$$

e a segunda como:

$$x(y + 1) - 2(y + 1) = (x - 2)(y + 1)$$

Agora, reescrevendo o limite:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \left( \frac{x^3 + x^2y - 2xy - 2x^2 - 2x + 4}{xy + x - 2y - 2} \right) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \left( \frac{(x - 2)(x^2 + xy - 2)}{(x - 2)(y + 1)} \right) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \left( \frac{(x^2 + xy - 2)}{(y + 1)} \right) \end{aligned}$$

Verificando, novamente, o limite do numerador e do denominador:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (x^2 + xy - 2) = 4 + 2 - 2 = 4$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (y + 1) = 1 + 1 = 2$$

Agora, podemos aplicar a regra do quociente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \left( \frac{x^3 + x^2y - 2xy - 2x^2 - 2x + 4}{xy + x - 2y - 2} \right) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (x^2 + xy - 2)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (y + 1)} = \frac{4}{2} = 2$$

## Continuidade

Finalmente, após expandirmos os conceitos de limites de funções de uma única variável já conhecidos para casos de funções com mais de uma variável, chegamos no momento final desta unidade, que visa definir para funções de várias variáveis um conceito muito importante a respeito das funções: a continuidade.

Thomas Júnior (2016) nos diz que o conceito de uma função de uma única variável também é válido aqui para uma função com  $n$  variáveis. Logo, tanto quanto no caso das funções de variável única, a continuidade de funções de  $n$  variáveis também será definida em termos do limite. Para esse assunto, Thomas Júnior (2016) enuncia a seguinte definição:

**Definição 13:** a função  $f(x, y)$  será dita **contínua num ponto**  $(x_0, y_0)$  se:

1. a função  $f$  for definida no ponto  $(x_0, y_0)$ ;
2. se o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  existir;
3. se o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  for igual à  $f(x_0, y_0)$ .

Essa definição de continuidade e de um ponto pode, ainda, ser estendida para a continuidade da função como um todo: se uma função for contínua em todos os pontos de seu domínio, tal função é dita contínua.

Ainda segundo Thomas Júnior (2016), qualquer combinação algébrica de funções contínuas também resultará em uma função contínua. Ou seja, a soma, a diferença e a multiplicação por constante, produtos, quocientes e potenciação de funções contínuas também irão produzir funções contínuas em seus domínios.

Sobre alguns tipos comuns de funções contínuas, Stewart (2017b) nos diz que as funções polinomiais de duas variáveis são sempre contínuas em  $\mathbb{R}^2$ , o que acaba por se estender às funções racionais, que são contínuas em seu domínio. Logo, em tais tipos de funções, o cálculo do limite pode ser feito facilmente pela substituição direta.

Com respeito à continuidade de funções, Flemming e Gonçalves (2005) enunciam uma outra propriedade de limites de funções. Considere  $f$  uma função de uma variável e  $g$  uma função de duas variáveis, contínua em  $(x_0, y_0)$ ; então, a função composta  $(f \circ g)$  também será contínua em  $(x_0, y_0)$ . Se essa mesma função  $f$  for contínua num ponto  $a$  e a função  $g$  for tal que seu limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = a$ , então:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f \circ g)(x,y) = f(a)$$

ou

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(g(x,y)) = f\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)\right)$$

### ATIVIDADE

4) Saber identificar se uma função é contínua ou não é importante para auxiliar na resolução de exercícios de Cálculo. Logo, buscando aprimorar sua habilidade nesse processo de identificação, analise as alternativas a seguir e assinale a correta.

- a) A função  $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 9)$  é contínua em  $(3,3)$ .
- b) A função  $f(x,y) = \frac{4-x}{x^2+3y^2+2}$  é contínua para todos os valores de  $x$  e  $y$  pertencentes a  $\mathbb{R}^2$ .
- c) A função  $f(x,y) = \frac{x-y}{2x^2+3y^2}$  é contínua para todos os valores de  $x$  e  $y$  pertencentes a  $\mathbb{R}^2$ .
- d) A função  $f(x,y) = \arctan\left(\frac{2x}{y}\right)$  é contínua para todos os valores de  $x$  e  $y$  pertencentes a  $\mathbb{R}^2$ .
- e) A função  $f(x,y) = \frac{2x^2}{x^2+x^2y^2}$  não é contínua em  $(0,0)$ .

## INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: *Cálculo – funções de uma e várias variáveis.*

Editora: Saraiva

Autor: MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O.

ISBN: 8547201106

Comentário: O livro indicado apresenta conteúdos introdutórios de forma muito prática e foi escrito em uma linguagem simples. Há vários exercícios, o que facilita a fixação dos conteúdos estudados.

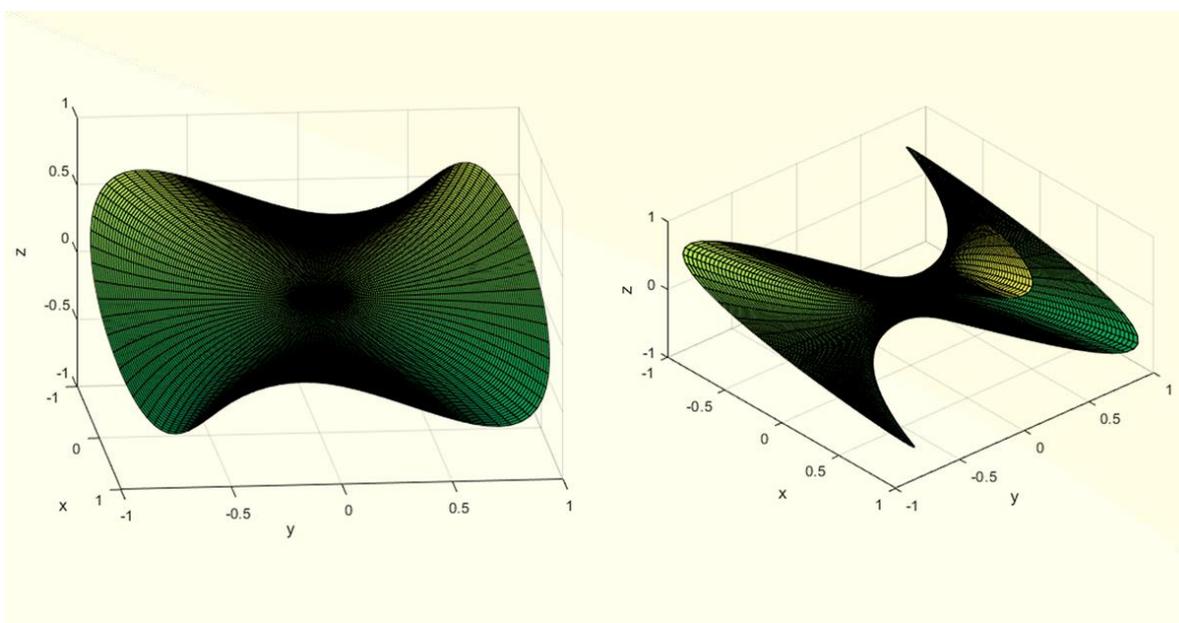
UNIDADE II

# Derivadas parciais e funções diferenciáveis

*Renam Luis Acorsi*

## Introdução

Após fixar os conceitos básicos sobre funções com mais de uma variável e fundamentar o conceito de limite para esse tipo de função, chegou o momento de expandirmos os conceitos para as derivadas. Na presente Unidade, iremos estudar as variações instantâneas de uma função com mais de uma variável. Você verá que a base deste tópico é semelhante àquela utilizada no estudo de derivadas de funções com uma única variável. Sendo assim, as duas primeiras seções se dedicam à definição das derivadas parciais e da diferencial de uma função com mais de uma variável, fundando as bases desta Unidade. Após isso, estudaremos o caso da regra da cadeia para esse tipo de função, as derivadas de ordem superior e a derivação implícita, completando o objetivo de estudo da presente Unidade.



Fonte: Denis Ismagilov / 123RF.

## DERIVADAS PARCIAIS

Existindo funções com mais de uma variável, é natural que você se veja em situações nas quais você deverá analisar como ocorrem as variações instantâneas nessas funções. Ou seja, você certamente será confrontado com problemas que exigem o cálculo de derivadas de funções com mais de uma variável.

Thomas Júnior (2016) destaca que o cálculo aplicado em funções com mais de uma variável será muito parecido com o cálculo para funções de uma única variável. No caso do cálculo aplicado em funções de múltiplas variáveis, o que se deve fazer é aplicar os conceitos do cálculo para funções de uma única variável em uma variável de cada vez.

Então, de acordo Leithold (1994), os estudos sobre derivação de uma função com  $n$  variáveis acaba se mostrando um caso unidimensional, pois a função será considerada uma função de apenas uma variável, sendo cada uma de suas  $n$  variáveis individualmente. Esse conceito de derivada aplicada apenas a uma variável por vez é o que se chama de **derivada parcial**.

### Derivada parcial de uma função com duas variáveis em um ponto

Considere uma função de duas variáveis  $z = f(x, y)$  e o ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Com essas informações básicas, a seguinte definição de derivada parcial é dada por Flemming e Gonçalves (2005):

**Definição 1:** Ao fixar a variável  $y$  em um valor  $y_0$ , a função  $z$  irá se tornar uma função de variável única, ou seja, você está lidando com a função  $g = f(x, y_0)$ . Então, a *derivada parcial* de  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é definida da seguinte maneira:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Isso se o limite acima existir. De maneira semelhante, se você fixar  $x$  em um valor  $x_0$ , você estará lidando com a função  $h = f(x_0, y)$  e a *derivada parcial* de  $f$  em relação a  $y$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (2)$$

Thomas Júnior (2016) e Stewart (2017) apresentam algumas formas comuns de representar as derivadas parciais de uma função  $z = f(x, y)$  tomada em um ponto  $(x_0, y_0)$ , as quais podem ser encontradas em diferentes literaturas da área:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = f_x = f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = z_x(x_0, y_0) = D_1 f = D_x f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = f_y = f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = z_y(x_0, y_0) = D_2 f = D_y f$$

Visando tornar essa definição mais próxima da que você certamente está acostumado(a) para a derivada de uma função de uma variável, Flemming e Gonçalves (2005) sugerem usar o  $\Delta$ . Assim, fazendo  $\Delta x = x - x_0$  e  $\Delta y = y - y_0$  em (1) e (2), você terá:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (4)$$

**Exemplo 1.1:** Considere o parabolóide definido pela função  $z = 9 - x^2 - y^2$ . Tomando o plano  $y = 1$ , encontre a curva  $c$  resultante da interseção de  $z$  e desse plano e, em seguida, avalie a derivada parcial  $f_x$  no ponto  $(1, 1)$ .

### Solução

Lembrando do gráfico dessa função, ela deve cruzar o eixo  $z$  em  $z = 9$  e sua projeção no eixo  $xy$  deve ser uma circunferência de raio  $\sqrt{9} = 3$ . A Figura 2.1 ilustra o gráfico dessa função e o plano  $y = 1$ .

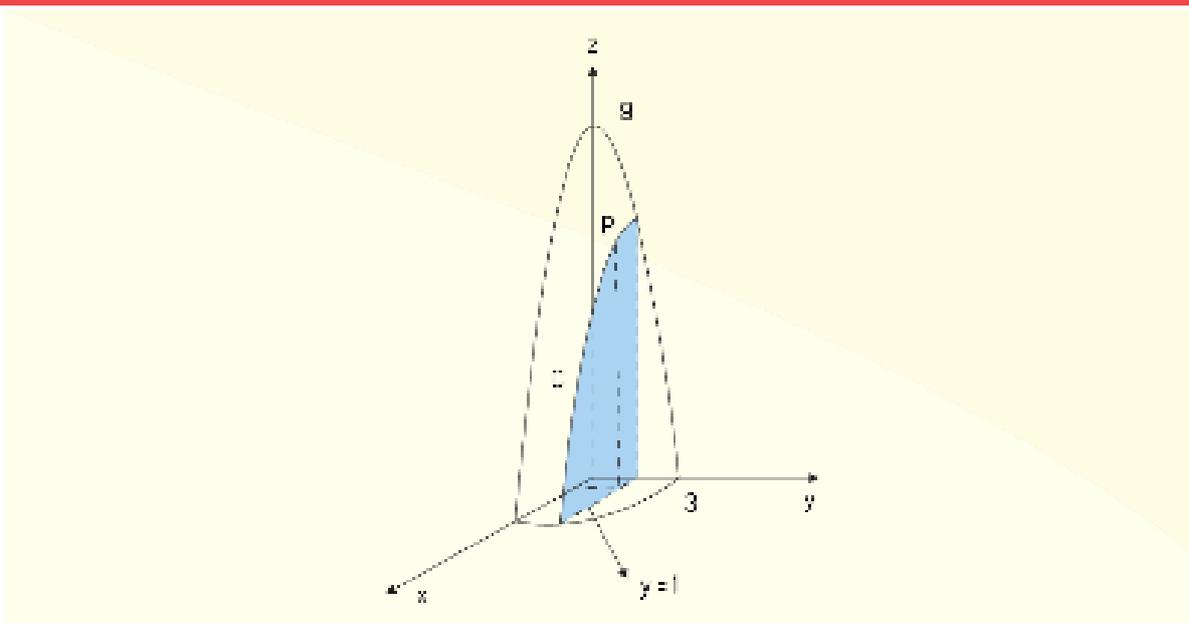


Figura 2.1 - Representação geométrica da função  $z = 9 - x^2 - y^2$

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 95).

Para encontrar a curva  $c$  resultante da interseção de  $z$  com o plano  $y = 1$ , basta avaliar  $z(x, 1)$ , pois tal curva representa a fixação do valor de  $y$  em 1. Assim:

$$c = z(x, 1) = 9 - x^2 - (1)^2 = 8 - x^2$$

Ou seja, pode-se dizer que  $c = g(x) = z(x, 1)$ . Agora, a inclinação da reta tangente a  $c$  no ponto  $(1,1)$  simplesmente é  $g'(1)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ . Aplicando, então, a Definição 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8 - x^2 - [8 - (1)^2]}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8 - x^2 - 8 + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(x + 1) = -2 \end{aligned}$$

Partindo também da Definição 1, Flemming e Gonçalves (2005) e Thomas Júnior (2016) realizam uma **análise geométrica das derivadas parciais**. Considere a função  $z = f(x, y)$  e um conjunto  $A \in \mathbb{R}^2$ , sendo que tal função admite derivada parcial no ponto  $(x_0, y_0) \in A$ . Se você considerar que a variável  $y$  apresenta um valor constante igual a  $y_0$ , a função  $z$  se tornará uma função de uma única variável  $z = f(x, y_0)$ , sendo essa

curva contida na interseção do plano  $y = y_0$  com a superfície de  $z = f(x, y)$ . Agora, a derivada parcial dessa função avaliada em um ponto  $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  pertencente à curva  $z = f(x, y_0)$  será a inclinação de uma reta tangente à curva  $z = f(x, y_0)$  no ponto  $P$ . Na Figura 2.2, tem-se a representação geométrica dessa derivada parcial em relação a  $x$  no ponto  $(x_0, y_0)$ .

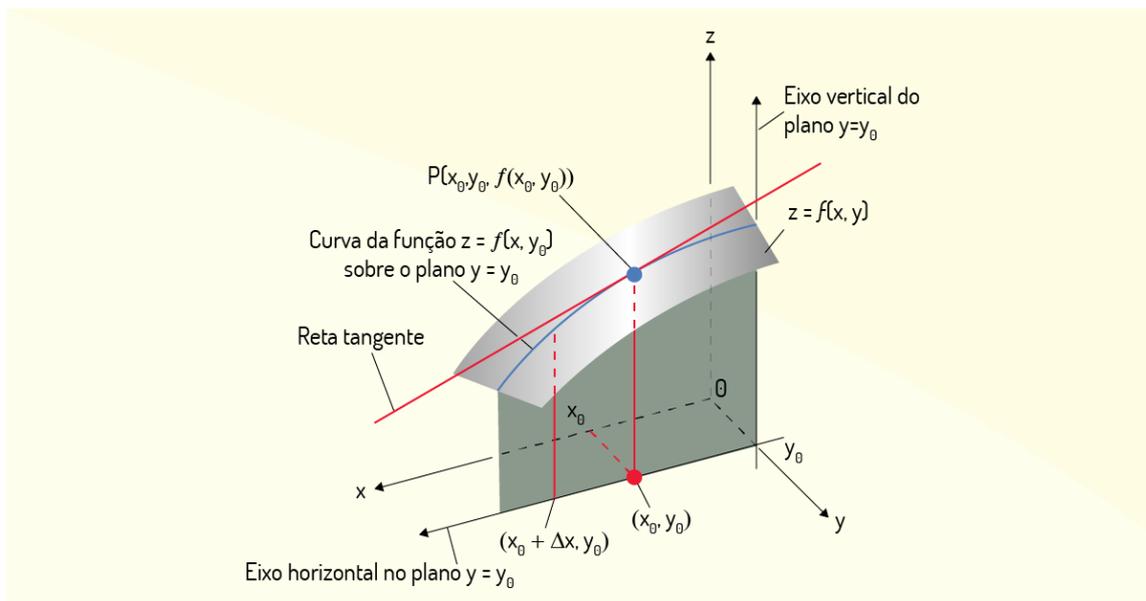


Figura 2.2 - Representação geométrica de  $\frac{\partial z}{\partial x}$

Fonte: Adaptado de Thomas Júnior (2016, p. 813).

De modo a tornar mais clara a visão da inclinação da tangente ou o seu coeficiente angular, a Figura 2.3 ilustra um ângulo distinto da Figura 2.2, em que podemos identificar o ângulo  $\alpha$  que mede tal valor.

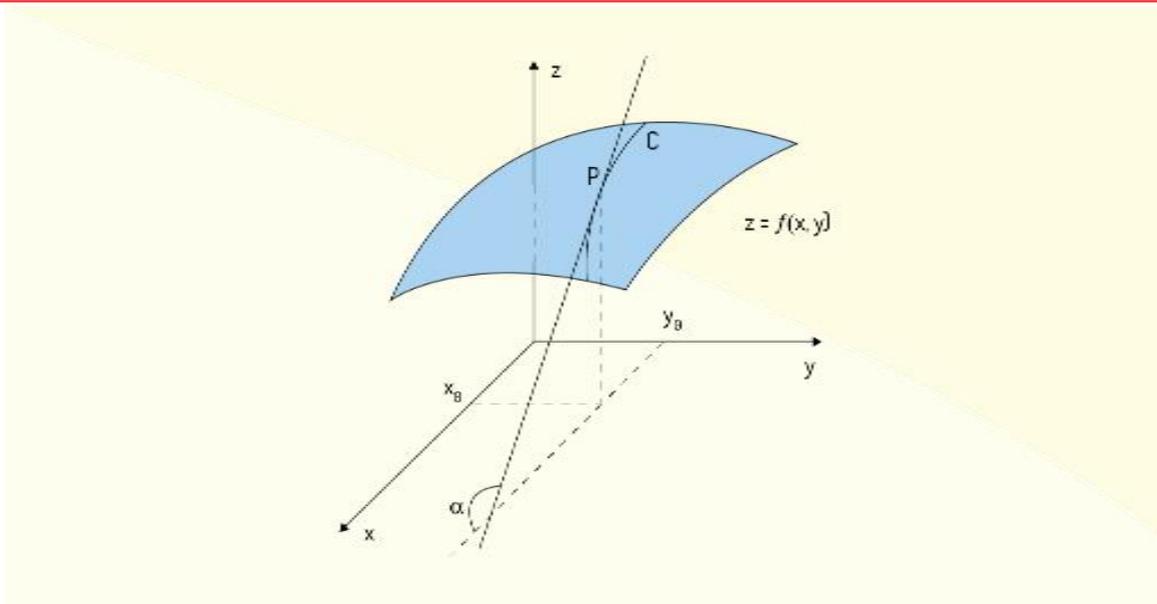


Figura 2.3 - Representação geométrica da inclinação  $\alpha$  da reta tangente

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 101).

Ainda segundo Flemming e Gonçalves (2005), esse ângulo  $\alpha$  pode ser avaliado da seguinte forma:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (5)$$

Para a derivada parcial dessa mesma função  $z = f(x, y)$  com relação a  $y$ , pode-se realizar uma análise análoga. Considerando, agora, que a variável  $x$  apresenta um valor constante igual a  $x_0$ , a função  $z$  se tornará uma função de uma única variável  $z = f(x_0, y)$ , sendo essa curva contida na interseção do plano  $x = x_0$  com a superfície de  $z = f(x, y)$ . Agora, a derivada parcial dessa função avaliada em um ponto  $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  pertencente à curva  $z = f(x_0, y)$  será a inclinação de uma reta tangente à curva  $z = f(x_0, y)$  no ponto  $P$ . Na Figura 2.4, tem-se a representação geométrica dessa derivada parcial em relação a  $y$  no ponto  $(x_0, y_0)$ .

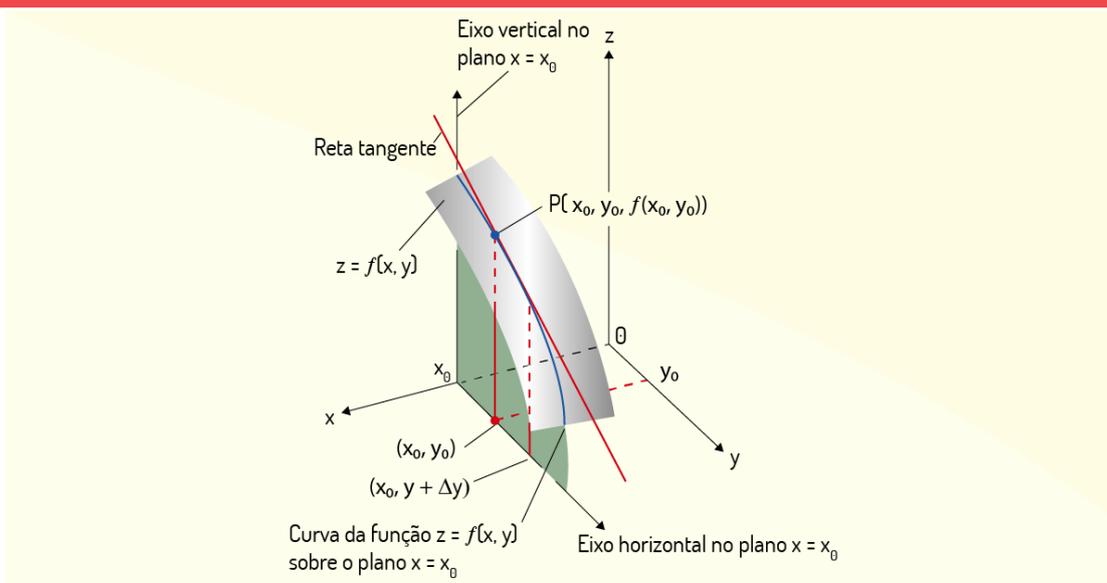


Figura 2.4 - Representação geométrica de  $\frac{\partial z}{\partial y}$

Fonte: Adaptado de Thomas Júnior (2016, p. 814).

Assim como no caso anterior, podemos avaliar a inclinação  $\beta$  dessa tangente. A Figura 2.5 ilustra um ângulo distinto da Figura 2.4, facilitando a identificação do ângulo  $\beta$ .

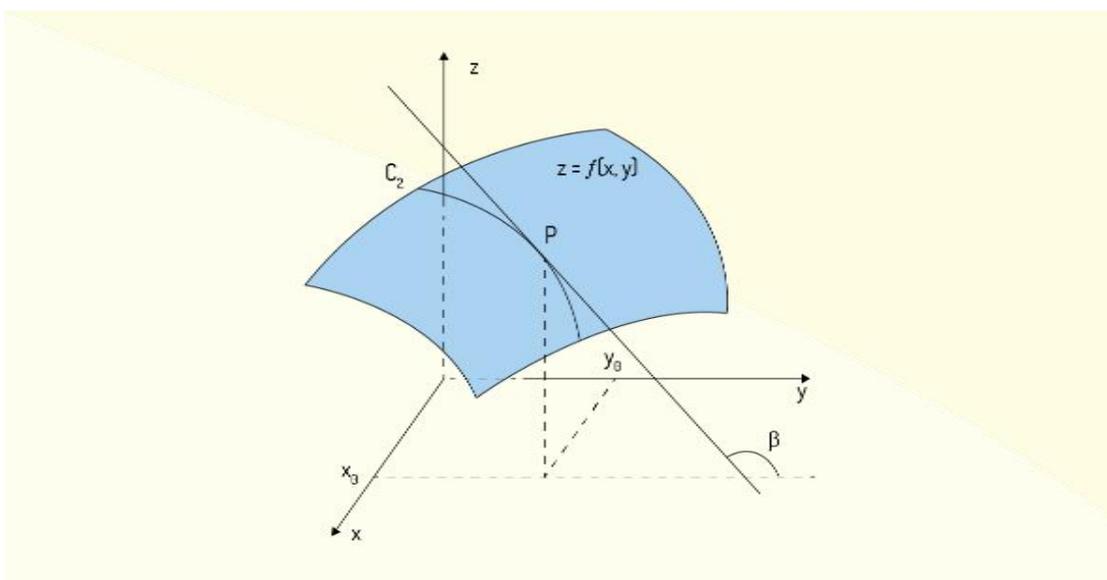


Figura 2.5 - Representação geométrica da inclinação  $\beta$  da reta tangente

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 101).

Este ângulo  $\beta$  pode ser avaliado da seguinte forma:

$$tg(\beta) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (6)$$

**Exemplo 1.2:** Sendo a função  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ , encontre a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  e  $y$  no ponto  $(1,1)$  e interprete esses números.

### Solução

Analisando a função fornecida, tem-se um parabolóide com valor máximo em  $z = 9$ .

Iniciando a análise pela derivada parcial  $f_x$ , tem-se uma parábola descrita como  $g(x) = 8 - x^2$ , resultante da interceptação do plano  $y = 1$  com a superfície descrita por  $f(x, y, z)$ . Tal qual visto no Exemplo 1.1, essa derivada parcial deve ser  $f_x(1,1) = -2$ . Ou seja, essa derivada parcial simplesmente é a inclinação da reta tangente que toca o ponto  $x = 1$  da parábola  $g(x)$ . Na Figura 2.6, temos a representação tridimensional dessa função e do plano  $y = 1$  e a visão bidimensional da parábola com a reta tangente.

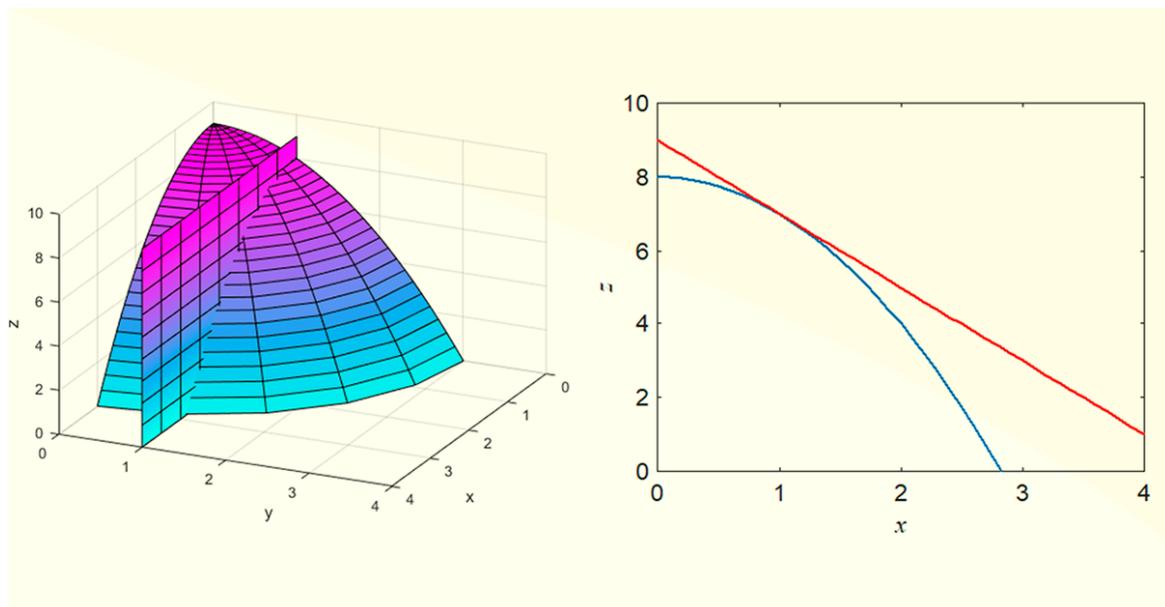


Figura 2.6 - Análise da derivada parcial  $f_x$  da função  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ou seja,  $tg \alpha = -2$ .

Analisando agora a derivada parcial  $f_y$ , você encontrará uma parábola descrita como  $h(y) = 8 - y^2$ , resultante da interceptação do plano  $x = 1$  com a superfície descrita por

$f(x, y, z)$ . Da mesma forma que foi realizado no Exemplo 1.1, você deve encontrar que essa derivada parcial também deve ser igual a  $-2$ . Assim, essa derivada parcial também será a inclinação da reta tangente que toca o ponto  $y = 1$  da parábola  $h(x)$ . Na Figura 2.7, temos a representação tridimensional da função mais o plano  $x = 1$  e a visão bidimensional da parábola como a reta tangente.

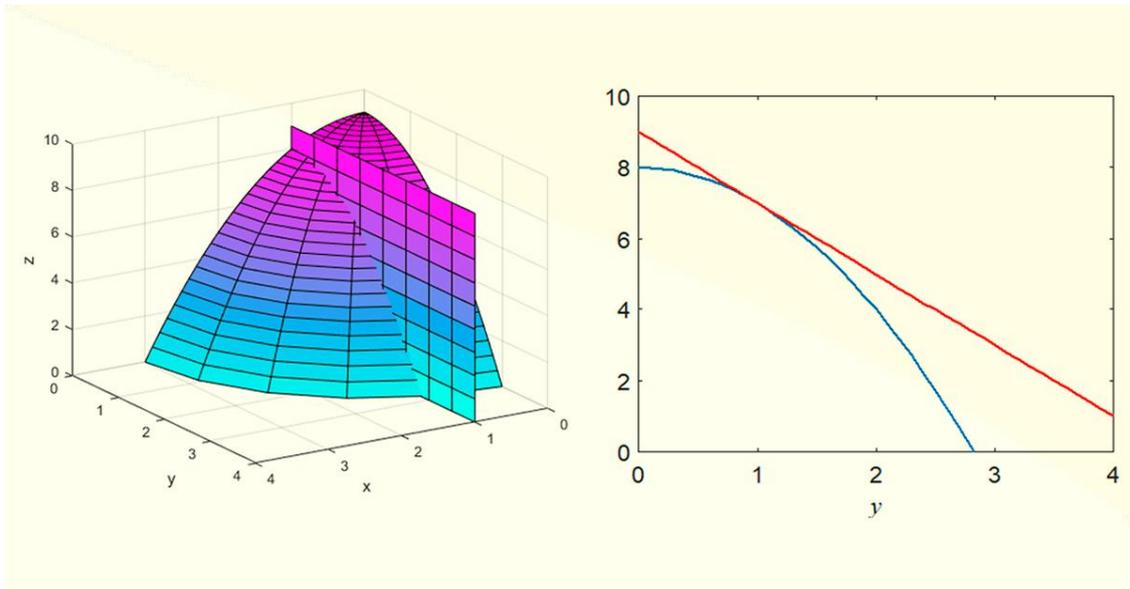


Figura 2.7 - Análise da derivada parcial  $f_y$  da função  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ou seja,  $\operatorname{tg} \beta = -2$ .

Se você comparar a Definição 1 com a definição da derivada de uma função de uma única variável, você perceberá que a derivada parcial da função  $f(x, y)$  em relação a  $x$  apresentada pela definição 1 é a derivada de uma função  $g(x) = f(x, y_0)$ . Ou seja, fixando o valor de  $y$  em uma constante  $y_0$ , a função  $f(x, y)$  se reduz a uma função de uma única variável  $g(x)$ . Então, avaliando a derivada  $g'(x)$ , temos a derivada parcial de  $f(x, y)$  em relação a  $x$ . Analogamente, para a derivada parcial de uma função  $f(x, y)$  em relação a  $y$ , fixando o valor de  $x$  em uma constante  $x_0$ , a função  $f(x, y)$  se reduz a uma função de uma única variável  $h(y)$ . Então, avaliando a derivada  $g'(y)$ , temos a derivada parcial de  $f(x, y)$  em relação a  $y$  (LEITHOLD, 1994).

Essa abordagem para o cálculo de derivadas parciais é bem mais simples que a mostrada na Definição 1, pois não há necessidade de calcular um limite que pode se mostrar complexo às vezes. Note que essa metodologia pode ser aplicada para funções com  $n$  variáveis: se você quer avaliar a derivada parcial em relação a uma variável, basta fixar o valor das demais variáveis, fazendo com que seu problema se reduza ao cálculo da derivada de uma função de uma única variável (LEITHOLD, 1994).

**Exemplo 1.3:** Sendo a função  $f(x, y) = 2x^3 + 2xy + y^2 + 2$ , encontre a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  e  $y$  no ponto  $(3, -4)$ .

### Solução

Para avaliar a derivada parcial em relação a  $x$ , basta considerar que  $y$  é uma constante  $y_0$ , o que reduz a função  $f(x, y)$  a uma função  $g(x) = f(x, y_0)$ . Então:

$$g(x) = f(x, y_0) \rightarrow g(x) = 2x^3 + 2xy_0 + y_0^2 + 2$$

Agora, basta avaliar a derivada de primeira ordem de  $g(x)$ :

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = 6x^2 + 2y_0$$

Finalmente, você deve substituir os valores do ponto estabelecido:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3, -4) = 6(3)^2 + 2(-4) = 54 - 8 = 46$$

Para avaliar a derivada parcial em relação a  $y$ , basta considerar agora que  $x$  é uma constante  $x_0$ , o que reduz a função  $f(x, y)$  a uma função  $h(y) = f(x_0, y)$ . Então:

$$h(y) = f(x_0, y) \rightarrow h(y) = 2x_0^3 + 2x_0y + y^2 + 2$$

Agora, basta avaliar a derivada de primeira ordem de  $h(y)$ :

$$h'(y) = \frac{d}{dy}g(y) = 2x_0 + 2y$$

Finalmente, você deve substituir os valores do ponto estabelecido:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3, -4) = 2(3) + 2(-4) = 6 - 8 = -2$$

### Derivada parcial de uma função com duas variáveis

Leithold (1994) expande a Definição 1 para avaliar a derivada parcial de uma função de duas variáveis em todo o domínio da função  $f(x, y)$ , o que é uma situação mais corriqueira no Cálculo. Então, segundo Leithold (1994):

**Definição 2:** a derivada parcial de uma função  $f(x, y)$  em relação a  $x$  é definida, para qualquer ponto do domínio de  $f$ , como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (5)$$

E de modo semelhante para  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (6)$$

Essa Definição 2, dada por Leithold, é de aplicação mais comum, chamada **derivada parcial de 1ª ordem de  $f$** . A seguir, serão apresentados alguns exemplos de avaliação de derivadas parciais para todo o domínio de funções.

**Exemplo 1.4:** Aplique a definição de derivada parcial para encontrar as derivadas parciais de 1ª ordem para a seguinte função  $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2$ .

#### Solução

Dada a Definição 2, basta que apliquemos as equações (5) e (6) para avaliar as derivadas parciais pedidas. Então, aplicando a equação (5) para  $\partial f/\partial x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x)(y) + (y)^2 - 2x^2 + 4xy - y^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 4xy - 4y\Delta x + y^2 - 2x^2 + 4xy - y^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 4xy - 4y\Delta x + y^2 - 2x^2 + 4xy - y^2}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 4y\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x - 4y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x - 4y) \\
 &= 4x - 4y
 \end{aligned}$$

Agora, aplicando a equação (6) para  $\partial f/\partial y$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 4(x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - 2x^2 + 4xy - y^2}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 4xy - 4x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - 2x^2 + 4xy - y^2}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-4x\Delta y + 2y\Delta y + \Delta y^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y(-4x + 2y + \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (-4x + 2y + \Delta y) \\
 &= 2y - 4x
 \end{aligned}$$

Certamente você está se perguntando se a maneira simplificada apresentada no final do tópico 1.1 também não pode ser aplicada nestas situações. Para a nossa sorte, a resposta é sim. O exemplo anterior foi realizado de modo a demonstrar a resolução de uma derivada parcial utilizando sua definição. Então, para avaliar a derivada parcial de uma função  $f(x, y)$  em relação a  $x$  em todo o seu domínio, transforme a função  $f(x, y)$  em uma função de única variável  $g(x) = f(x, y_0)$  fixando  $y$  em um valor constante  $y_0$ . Avaliando, então, a derivada  $g'(x)$  irá fornecer a derivada parcial de  $f_x(x, y)$ . Utilizando essa mesma linha de raciocínio, mas fixando  $x$  em um valor constante  $x_0$ , você é capaz de reduzir a função  $f(x, y)$  a uma função de única variável  $h(y) = f(x_0, y)$ . Então, avaliando a derivada  $g'(y)$ , temos a derivada parcial de  $f(x, y)$  em relação a  $y$  (LEITHOLD, 1994).

**Exemplo 1.5:** Encontre as derivadas parciais de 1ª ordem para a função  $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2$ .

**Solução**

Para encontrarmos a derivada parcial de uma função utilizando a forma simplificada, basta considerar todas as variáveis como constantes, exceto aquela na qual se quer avaliar a derivada. Então, para avaliar  $\partial f/\partial x$ , basta considerar que  $y$  é uma constante  $y_0$ . Assim, você terá a seguinte função:

$$f(x, y_0) = g(x) = 2x^2 - 4xy_0 + y_0^2$$

Agora, basta avaliar  $g'(x)$ . Note que  $4y_0$  é uma constante, o que resulta em:

$$g'(x) = 2 \cdot 2x^1 - 1 \cdot 4y_0 \cdot x^0 + 0$$

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4y$$

Perceba que no resultado final é indiferente você representar  $y$  ou  $y_0$ . Basta lembrar que ele é um valor constante. Agora, para  $\partial f/\partial y$ , considerando que  $x$  é uma constante  $x_0$ , então:

$$f(x_0, y) = h(y) = 2x_0^2 - 4x_0y + y^2$$

Como  $4x_0$  é uma constante, então:

$$h'(y) = 0 - 1 \cdot 4x_0 \cdot y^0 + 2 \cdot y^1$$

$$h'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 2y$$

**Exemplo 1.6:** Verifique se a função  $f(x, y) = x + y + \ln(xy)$  satisfaz a seguinte equação:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = x - y$$

### Solução

Primeiro, você precisa avaliar as derivadas parciais de 1ª ordem indicadas, caso elas existam. Para tal, você se verá com o caso de avaliar a derivada de  $\ln(xy)$  em que terá uma das variáveis como constante de cada vez. Isso significa que terá de aplicar a regra da cadeia, pois tem a derivada de uma função composta, como  $g \circ h = g(h(x))$ , em que  $g(x) = \ln x$  e  $h(x) = xy$ . Por exemplo, no caso de  $y$  ser considerada constante:

$$\frac{d}{dx} [g(h(x))] = g'(h(x)) \cdot h'(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [\ln(xy)] = \frac{1}{xy} \cdot y$$

O mesmo é feito quando se considera  $x$  como constante.

Agora, dando continuidade à resolução do exemplo, vamos avaliar a derivada parcial em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 1 + \frac{1}{xy} \cdot y = 1 + \frac{1}{x}$$

E a derivada parcial em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 1 + \frac{1}{xy} \cdot x = 1 + \frac{1}{y}$$

Finalmente, deve-se avaliar o que é proposto no enunciado:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = x - y \rightarrow x \left(1 + \frac{1}{x}\right) - y \left(1 + \frac{1}{y}\right) = x - y$$

$$x + \frac{x}{x} - y - \frac{y}{y} = x + 1 - y - 1 = x - y$$

Logo, a função indicada satisfaz a equação dada.

É importante ressaltar que tudo o que foi visto até aqui é aplicável para funções com mais de duas variáveis, como dito ao final do tópico 1.1.

**Exemplo 1.7:** Encontre as derivadas parciais de 1ª ordem da função a seguir.

$$f(x, y, z, w) = xyz \cdot \ln(x^3 + z^2 + w^2)$$

### Solução

Perceba que a função indicada apresenta quatro variáveis. Assim, as derivadas parciais de primeira ordem dessa função devem ser  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$ ,  $\partial f/\partial z$  e  $\partial f/\partial w$ . Começando com  $\partial f/\partial x$ , devemos considerar  $y, z$  e  $w$  como constantes. Você precisará da regra do produto e da regra da cadeia para resolver essa derivada, pois está lidando com a diferencial de uma função  $F(x) = c_1 x \cdot \ln(c_2 + x^3)$ , em que  $c_1 = yz$  e  $c_2 = z^2 + w^2$ . A regra do produto para duas funções  $g(x) \cdot h(x)$  é:

$$\frac{d}{dx} [g(x) \cdot h(x)] = g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$$

Fazendo  $g(x) = xyz$ , então  $g'(x) = yz$  e, se  $h(x) = \ln(x^3 + z^2 + w^2)$ , então, pela regra da cadeia, revisada no Exemplo 1.6,  $h'(x) = 3x^2/(x^3 + z^2 + w^2)$ . Logo, a derivada parcial de 1ª ordem de  $f$  em relação a  $x$  será:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z, w) = \frac{d}{dx} F(x) = xyz \cdot \frac{3x^2}{x^3 + z^2 + w^2} + yz \cdot \ln(x^3 + z^2 + w^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z, w) = \frac{3x^3 yz}{x^3 + z^2 + w^2} + yz \cdot \ln(x^3 + z^2 + w^2)$$

Para as demais derivadas parciais, você deve proceder de forma análoga à apresentada acima. Para  $\partial f/\partial y$ , note que todo o termo do logaritmo será constante; assim:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z, t) = xz \cdot \ln(x^3 + z^2 + w^2)$$

Para  $\partial f/\partial z$ , o caso será mais parecido com  $\partial f/\partial x$ , pois serão necessárias as regras do produto e da cadeia novamente. Sendo  $g(z) = xyz$ , então  $g'(z) = xy$  e, se  $h(z) = \ln(x^3 + z^2 + w^2)$ , então  $h'(z) = 2z/(x^3 + z^2 + w^2)$ . Logo:

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z, w) = \frac{2xyz^2}{x^3 + z^2 + w^2} + xy \cdot \ln(x^3 + z^2 + w^2)$$

E, finalmente, para  $\partial f/\partial w$ , em que se tem  $xyz$  igual a uma constante:

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x, y, z, t) = xyz \cdot \frac{1}{x^3 + z^2 + w^2} \cdot 2w$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x, y, z, t) = \frac{2xyzw}{x^3 + z^2 + w^2}$$

## FIQUE POR DENTRO

Como esperado, as derivadas parciais apresentam diversos usos em várias outras disciplinas mais avançadas. Afinal, o cálculo é a base fundamental para diversas outras áreas da ciência que o empregam largamente. Visando apresentar um exemplo simples da aplicação dos conceitos de derivadas parciais, a seguir é indicado um artigo no qual os autores fazem uso de derivadas parciais para melhorar os dados de levantamentos topográficos, ou seja, uma aplicação voltada para a engenharia civil e geografia.

Link:

<[https://www.researchgate.net/profile/Rubia\\_Mantai/publication/279505231\\_UTILIZACAO\\_DE\\_DERIVADAS\\_PARCIAIS\\_EM\\_LEVANTAMENTOS\\_TOPOGRAFICOS/inks/5655bf2908aefe619b1b7738/UTILIZACAO-DE-DERIVADAS-PARCIAIS-EM-LEVANTAMENTOS-TOPOGRAFICOS.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Rubia_Mantai/publication/279505231_UTILIZACAO_DE_DERIVADAS_PARCIAIS_EM_LEVANTAMENTOS_TOPOGRAFICOS/inks/5655bf2908aefe619b1b7738/UTILIZACAO-DE-DERIVADAS-PARCIAIS-EM-LEVANTAMENTOS-TOPOGRAFICOS.pdf)>. Acesso em: 22 abr. 2019.

## ATIVIDADE

- 1) Um dos tópicos centrais do Cálculo reside na avaliação de derivadas de funções. Como problemas com mais de uma variável são muito comuns, visando sua prática de resoluções de derivadas de funções com mais de uma variável, considere as três funções indicadas a seguir, analise as alternativas e assinale a que apresenta derivada parcial indicada de forma correta.

$$f(x, y) = x^2 y^2 \cdot \ln(x^2 + y^2) \quad g(x, y, z) = xyz \cdot \ln(y + z)^2 \quad h(x, y) = e^{-y/x} \cdot \ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$$

- a) A derivada parcial de 1ª ordem de  $f$  em relação a  $x$  é igual a

$$f_x = 2x^2 y^2 \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2) \right]$$

- b) A derivada parcial de 1ª ordem de  $g$  em relação a  $y$  é igual a

$$f_y = xz \left[ \frac{2}{y+z} + \ln(y + z)^2 \right]$$

- c) Para a função  $g$  dada, tem-se que  $f_x = f_z$ .

- d) A derivada parcial de 1ª ordem de  $h$  em relação a  $x$  é igual a

$$f_x = \frac{e^{y/x}}{x} \left[ 2 - y \cdot \ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \right]$$

- e) A derivada parcial de 1ª ordem de  $h$  em relação a  $y$  é igual a

$$f_y = \frac{e^{-y/x}}{y} \left[ 2 + \frac{y}{x} \cdot \ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \right]$$

## DIFERENCIAL DE UMA FUNÇÃO

Após estudar as derivadas parciais no tópico anterior, agora vamos expandir nosso conhecimento a respeito de outros assuntos das derivadas de funções com única variável para casos de funções com duas variáveis.

### Diferenciabilidade

Agora devemos estender o conceito de diferenciabilidade do caso de funções de uma única variável para funções com duas variáveis. Quando você estudou diferenciais de funções com uma única variável, você viu que era fácil identificar graficamente onde uma função é derivável: basta encontrar pontos angulosos. Ou seja, uma função cuja curva se apresente suave terá que cada um de seus pontos apresenta uma reta tangente única (FLEMMING; GONÇALVES, 2005).

Devemos, então, buscar expandir esse conceito para funções com duas variáveis. Flemming e Gonçalves (2005) afirmam que, para uma função  $f(x, y)$ , cada ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  em seu gráfico deverá apresentar um único plano tangente que represente uma aproximação decente de  $f$  nos arredores do ponto  $(x_0, y_0)$ .

Novamente caímos em um conceito aparente abstrato. Afinal, o que seria a aproximação decente dita no parágrafo acima? Esse conceito pode ser exemplificado, de acordo com Leithold (1994), utilizando uma função  $y = f(x)$ . Se essa função  $y$  é derivável em um ponto  $x_0$ , sua derivada será dada por:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (7)$$

Em (7), os valores  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são chamados de **incrementos** de  $x$  e  $y$ . Leithold (1994) ainda destaca que  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

Agora, se o módulo do incremento de  $x$  for pequeno, mas nunca igual a zero, Leithold (1994) diz que a razão  $\Delta y/\Delta x$  irá diferir da derivada  $f'(x)$  por um número muito pequeno, dependente de  $\Delta x$ . Tal número, sendo denotado por  $\epsilon$ , é definido, para  $\Delta x \neq 0$  como:

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \quad (8)$$

A equação (8) ainda pode ser reescrita como:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon\Delta x \quad (9)$$

Note que  $\epsilon$  é uma função de  $\Delta x$ , sendo que, se  $\Delta x \rightarrow 0$ , então  $\epsilon \rightarrow 0$ , ou seja,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon = 0$ .

Disso, tem-se que, se a função  $f$  for derivável em um ponto  $x_0$ , então, o incremento de  $f$  nesse ponto  $x_0$ ,  $\Delta f(x_0)$  será:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x \quad (10)$$

Outra forma de ver essa aproximação decente pode ser encontrada, segundo Flemming e Gonçalves (2005), a partir da definição da derivada de uma função  $f(x)$ , que é:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Essa definição pode ser reescrita como:

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] \rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} \right\}$$

A expressão  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  é a reta tangente ao gráfico da função  $f(x)$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$ . Essa função  $y$  é considerada uma aproximação boa ou decente para  $f$  próximo de  $x_0$ . Disso, Flemming e Gonçalves (2005) destacam que, quando  $x$  se aproxima de  $x_0$ , a diferença entre  $y$  e  $f(x)$  irá se aproximar de zero de maneira mais rápida, como mostra a Figura 2.8.

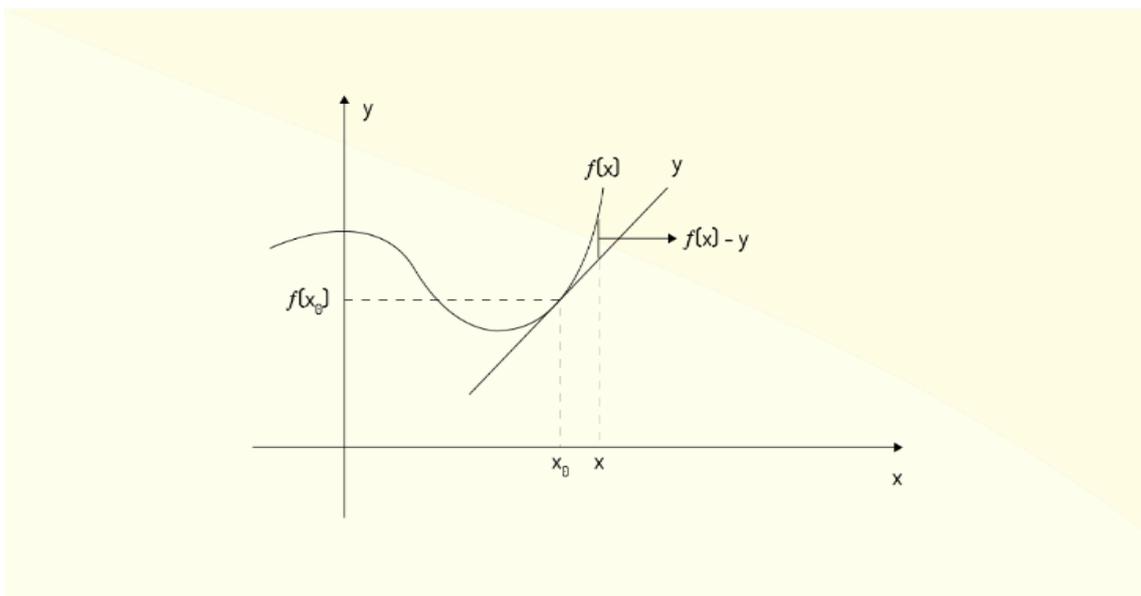


Figura 2.8 - Aproximação de  $f$  nos arredores do ponto  $(x_0)$

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 105).

Agora podemos fazer a expansão dessa definição feita para funções de uma única variável para o caso de funções com duas variáveis. Das definições de derivadas parciais, foi visto que  $f_x$  é o coeficiente angular da reta tangente à curva de interseção da superfície de  $f(x, y)$  com o plano  $y = y_0$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ . Uma interpretação análoga pode ser proposta para  $f_y$ , que é o coeficiente angular da reta tangente à curva de interseção da superfície de  $f(x, y)$  com o plano  $x = x_0$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ . Flemming e Gonçalves (2005) destacam que é intuitivo que essas duas retas tangentes pertençam a um mesmo plano, como ilustra a Figura 2.9.

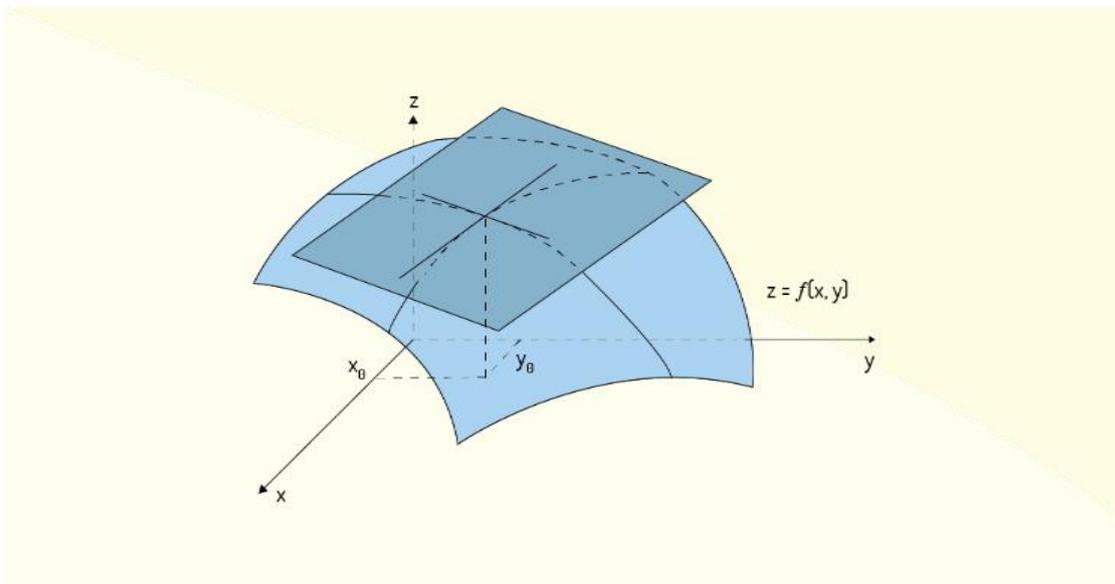


Figura 2.9 - Plano contendo as retas tangentes de inclinações  $f_x$  e  $f_y$

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 105).

Com isso, pode-se propor a seguinte equação para o plano tangente a  $z = f(x, y)$ , em um ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ :

$$h(x, y) = ax + by + c \tag{11}$$

Partindo de (11), sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes, Flemming e Gonçalves (2005) destacam que você deve conseguir identificar que:

- i. a inclinação  $a$  do plano no sentido do eixo  $x$  pode ser encontrada por:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (12)$$

- ii. a inclinação  $b$  do plano no sentido do eixo  $y$  pode ser encontrada por:

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (13)$$

- iii. a equação (11) é satisfeita pelo ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , visto que:

$$h(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (14)$$

Substituindo (12) e (13) em (11):

$$h(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + c \quad (15)$$

Agora, avaliando (15) para o ponto  $(x_0, y_0)$ :

$$h(x, y) = f(x_0, y_0) = x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + c$$

$$c = f(x_0, y_0) - x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (16)$$

Finalmente, substituindo agora (16) em (15):

$$h(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (17)$$

A Equação (17) é a equação do plano tangente ao gráfico da função  $z = f(x, y)$  no ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , caso esse plano exista. Disso, pode-se propor, então, a definição de uma função diferenciável. De acordo com Flemming e Gonçalves (2005):

**Definição 3:** Uma função  $z = f(x, y)$  será diferenciável no ponto  $(x_0, y_0)$  caso suas duas derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  existam e se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - \left[ f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \quad (18)$$

Note que o denominador de (18) é a distância dos pontos  $(x, y)$  e  $(x_0, y_0)$ . Assim, da Definição 3, Flemming e Gonçalves (2005) indicam que  $z$  será diferenciável em um conjunto  $A \subset D_z$ , em que  $D_z$  é o domínio de  $z$ , se esta função for diferenciável em todos os pontos de  $A$ .

Veja que, para provar que uma função  $z$  é diferenciável em um conjunto de pontos  $(x, y)$ , as derivadas parciais de todas as combinações  $(x, y)$  possíveis para esse conjunto devem existir e o limite indicado por (18) deve existir. Se apenas um desses pontos não for verificado verdadeiro, então  $z$  não é diferenciável em um ponto e, por consequência, não é diferenciável em todo o conjunto de pontos em questão.

**Exemplo 2.1:** Verifique se a função  $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

### Solução

Dada a Definição 3, precisamos checar se a função dada apresenta derivadas parciais para quaisquer pontos de  $\mathbb{R}^2$ . Então, para qualquer ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , você terá:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4x_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 4y_0$$

Veja que as derivadas parciais de 1ª ordem existem para quaisquer pontos  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Agora, deve-se verificar o limite proposto em (18):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - \left[ f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{2x^2 + 2y^2 - [2x_0^2 + 2y_0^2 + (x - x_0)(4x_0) + (y - y_0)(4y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{2x^2 + 2y^2 + 2x_0^2 - 4xx_0 + 2y_0^2 - 4yy_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{2(x-x_0)^2 + 2(y-y_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \\
 &= 2 \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \\
 &= 2 \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \\
 &= 2 \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = 2 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Como tanto o limite quanto as derivadas parciais de primeira ordem existem, então, a função  $f(x, y)$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 2.2:** Verifique se a função a seguir é diferenciável na origem.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & , \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases}$$

### Solução

O primeiro passo é checar se as derivadas parciais existem na origem. Note que, para essa função, é mais fácil avaliar a derivada parcial utilizando a definição com limite, dado pela Equação (1):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{x^2+0} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{x} = 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y,0) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y^3}{0+y^2} - 0}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y-0}{y} = 1
 \end{aligned}$$

Agora, deve-se verificar o limite proposto em (18):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - \left[ f(0,0) + (x-0) \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + (y-0) \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right]}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{y^3}{x^2 + y^2} - [0 + (x - 0)(0) + (y - 0)(1)]}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{y^3}{x^2 + y^2} - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{y^3 - y(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{-x^2 y}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Para avaliar o limite, faça a análise da aproximação para (0,0) em cada eixo. Assim, fixando  $y = 0$ , analisamos o caso de  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x^2 \cdot 0}{(x^2 + 0)^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{(x^2)^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Agora, analisando  $(x, y) \rightarrow 0$  pela semirreta  $y = x$  para valores  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, x)} \frac{-x^2 \cdot y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, x)} \frac{-x^3}{(x^2 + x^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, x)} \frac{-x^3}{(2x^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, x)} \frac{-x^3}{2\sqrt{2}x^3} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, x)} \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Como o limite não existe, pois aproximações diferentes levam a resultados diferentes, então a função dada não é diferenciável na origem.

Antes de continuarmos com esse assunto, você já deve ter percebido que não é muito simples provar a diferenciabilidade de uma função. Mais adiante, será apresentado um critério que facilita identificar funções diferenciáveis. Mas antes de ver tal critério, Leithold (1994) ainda propõe uma relação entre a diferenciabilidade de uma função com a continuidade desta: uma função  $f(x, y)$  que é diferenciável em um ponto  $(x_0, y_0)$  também será contínua nesse ponto, ou seja:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Agora pode-se enunciar a condição que Flemming e Gonçalves (2005) afirmam como suficiente para a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis: seja a função  $f(x, y)$  e o ponto  $(x_0, y_0) \in D_f$ , contido em um conjunto aberto  $A$ . Se a função  $f(x, y)$

tiver as duas derivadas parciais de 1ª ordem  $\partial f/\partial x$  e  $\partial f/\partial y$  em  $A$  e se essas derivadas parciais forem contínuas no ponto  $(x_0, y_0)$ , então pode-se dizer que  $f(x, y)$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

**Exemplo 2.3:** Verifique se a função  $f(x, y) = 2xy^2 + 4x^2y + 3xy$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

### Solução

De acordo com a proposição de Flemming e Gonçalves (2005), precisamos verificar se as derivadas parciais de 1ª ordem existem e se são contínuas em  $\mathbb{R}^2$ . Então, para qualquer ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y^2 + 8xy + 3y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2y_0^2 + 8x_0y_0 + 3y_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4xy + 4x^2 + 3x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 4x_0^2 + 4x_0y_0 + 3x_0$$

Observe que as derivadas parciais são polinômios com domínio igual a  $\mathbb{R}^2$ . Logo, ambas as derivadas parciais são contínuas em todo o  $\mathbb{R}^2$ . Com isso, tem-se que a função  $f$  indicada é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

### Plano tangente e vetor gradiente

Flemming e Gonçalves (2005) apresentam uma informação interessante sobre o plano tangente descrito pela equação (17): nem sempre o plano definido pela equação (17) irá existir e, mesmo que exista, pode não ser tangente à função  $f(x, y)$ .

Funções que apresentam um gráfico suave, como os paraboloides, apresentam um plano tangente em todos os seus pontos. No entanto, funções que apresentam no gráfico alguma região angulosa, como o gráfico da função de um cone, não admitem o plano tangente nessas regiões angulosas. Na Figura 2.10 são mostrados os gráficos das funções  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e  $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Observe que claramente a função  $g(x, y)$  não apresentará nenhum plano tangente em sua origem, diferente do que se tem com a função  $f(x, y)$ .

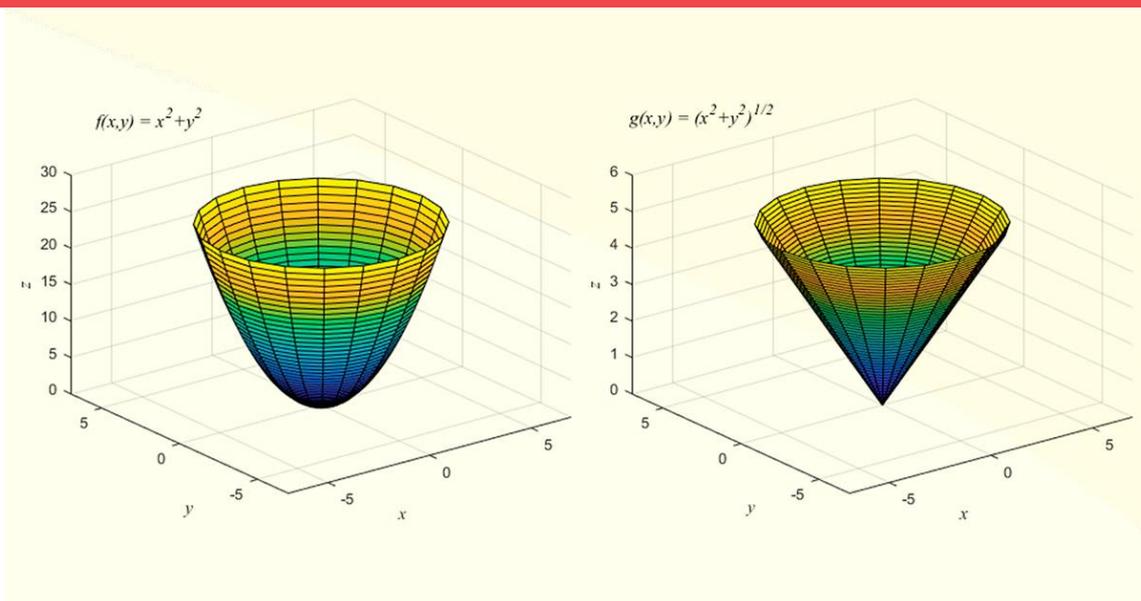


Figura 2.10 - Gráfico do parabolóide  $f(x, y)$  e do cone  $g(x, y)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com isso, Flemming e Gonçalves (2005) apresentam a seguinte definição para o plano tangente ao gráfico de uma função de duas variáveis:

**Definição 4:** considere uma função  $f(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que seja diferenciável em um ponto  $(x_0, y_0)$ . O plano tangente ao gráfico dessa função em um ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  é aquele plano definido pela seguinte equação:

$$z - f(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (19)$$

Portanto, basicamente, para que o plano definido pela Equação (19) exista, é necessário, além de satisfazer a Equação (19), que a função apresente derivadas parciais no ponto em questão. Por exemplo, considerando o parabolóide definido como  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , você tem as seguintes derivadas parciais de 1ª ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Veja que, para o ponto  $(0,0)$ , ou seja, a origem, a Equação (19) se reduz a:

$$z - 0 = (x - 0) \cdot 2 \cdot 0 + (y - 0) \cdot 2 \cdot 0 \quad \rightarrow \quad z = 0$$

Ou seja, o plano definido pelos eixos  $xy$  em  $z = 0$  é o plano tangente à origem nesse gráfico, como se pode ver na Figura 2.11.

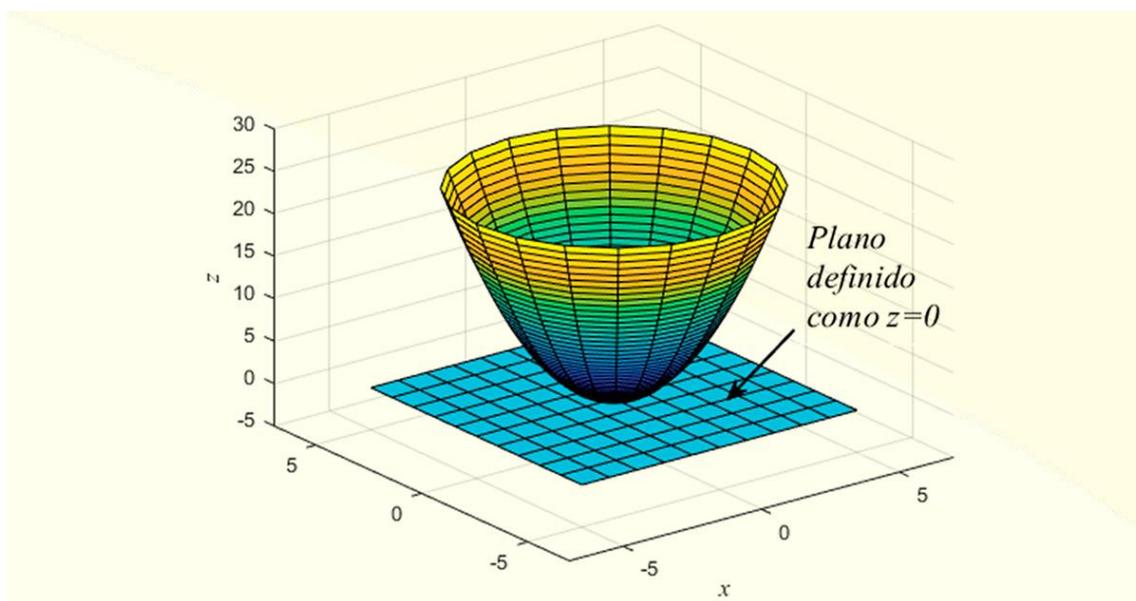


Figura 2.11 - Plano tangente ao gráfico do parabolóide  $f(x, y) = x^2 + y^2$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se você verificar para a função cone  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , verá que as derivadas parciais de 1ª ordem existem e são as seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

No entanto, não é possível avaliar  $f_x(0,0)$  e  $f_y(0,0)$ , que são necessárias para avaliar a Equação (19). Logo, realmente não existe o plano tangente na origem do gráfico cone indicado.

Flemming e Gonçalves (2005) fazem um destaque muito interessante sobre as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . Quando essas derivadas parciais são organizadas de certa forma, elas formam um **vetor**, representado por  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$ .

Tal vetor é muito comum no cálculo e em disciplinas que fazem uso do Cálculo. Esse vetor apresenta uma série de propriedades interessantes e a seguir será discutida uma breve apresentação sobre algumas dessas propriedades, mas esse assunto não será tratado muito profundamente neste material. Uma das definições mais importantes desse vetor é o gradiente, definido por Flemming e Gonçalves (2005) da seguinte maneira:

**Definição 5:** considere uma função  $f(x, y)$ , que admite derivadas parciais de 1ª ordem em um ponto  $(x_0, y_0)$ . O gradiente dessa função em tal ponto, denotada como  $grad f(x_0, y_0)$  ou  $\nabla f(x_0, y_0)$ , é o vetor cujas componentes são as derivadas parciais de 1ª ordem da função no ponto  $(x_0, y_0)$ . Assim:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \quad (20)$$

Esse vetor gradiente pode ser aplicado a um ponto genérico  $(x, y)$  do domínio da função. Essa aplicação genérica é a mais usual que se tem para o gradiente:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Observe que essa definição pode ser ampliada para funções com mais de duas variáveis, seguindo a mesma linha de raciocínio apresentada. Assim, para uma função  $w = f(x, y, z)$ , tem-se o seguinte gradiente:

$$\nabla w = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

**Exemplo 2.4:** Determinar o vetor gradiente da função  $w = 2xy^2 + 3xyz$ .

### Solução

Para encontrar o vetor gradiente, é necessário avaliar as derivadas parciais de 1ª ordem da função dada. Assim:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2y^2 + 3yz$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2xy + 3xz$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 3xy$$

Logo, o vetor gradiente para tal função será:

$$\nabla w = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \rightarrow \nabla w = (2y^2 + 3yz, 2xy + 3xz, 3xy)$$

Flemming e Gonçalves (2005) fazem destaque de outro ponto a respeito de propriedades dos gradientes. Uma das mais importantes propriedades do gradiente de uma função é que ele é perpendicular às curvas de nível dessa função. Ou seja, considere uma função  $f(x, y)$  e o ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , pelo qual passa uma curva de nível  $C_k$ . Então, se  $\nabla f(x_0, y_0)$  não for nulo, ele será perpendicular à curva  $C_k$  em  $P_0$ , ou seja, ele será perpendicular à reta tangente a  $C_k$  no ponto  $P_0$ . A Figura 2.12 ilustra essa propriedade.

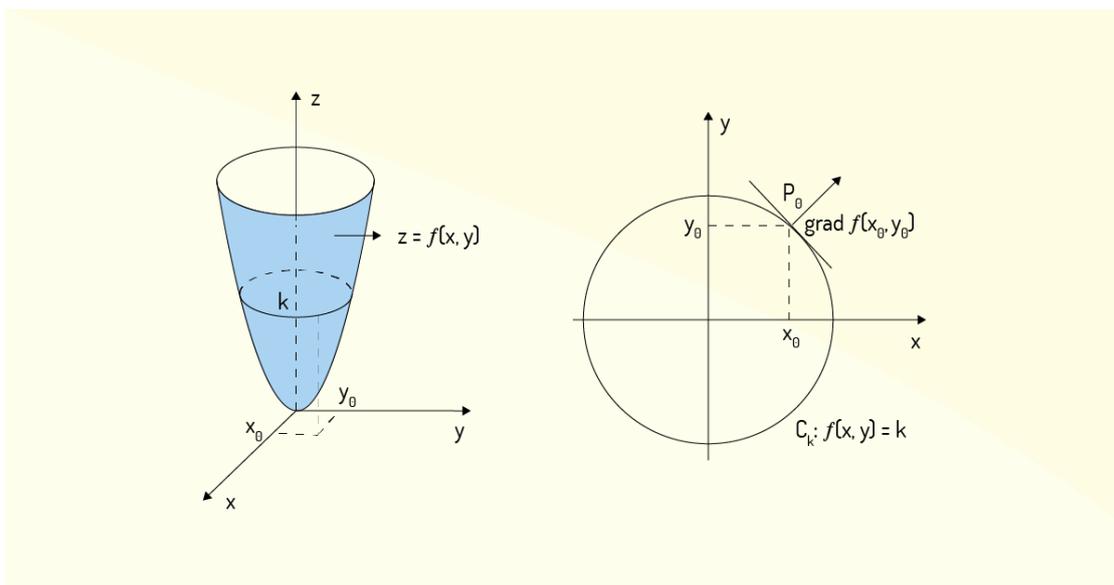


Figura 2.12 - Representação gráfica de  $\nabla f(x_0, y_0)$

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 117).

Observe que o gradiente se encontra no plano  $xy$ , que é o domínio da função dada.

### Diferencial

Até o momento, analisamos basicamente o plano tangente à superfície de uma função  $f(x, y)$ . Agora analisaremos o diferencial de uma função. Para funções de uma única variável  $y = f(x)$ , a diferencial pode ser aproximada a um acréscimo  $\Delta y$  de sua variável dependente. Analogamente, para uma função  $z = f(x, y)$ , a diferencial deverá ser uma transformação linear que aproxime um acréscimo  $\Delta z$  de  $z$ . Com isso, Flemming e Gonçalves (2005) enunciam a seguinte definição:

**Definição 6:** considere uma função  $f(x, y)$ , que é diferenciável no ponto  $(x_0, y_0)$ . A diferencial dessa função no ponto  $(x_0, y_0)$  será definida pela seguinte transformação linear  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$T(x - x_0, y - y_0) = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (21)$$

Fazendo  $h = x - x_0$  e  $k = y - y_0$ , (21) pode ser reescrita com:

$$T(h, k) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (22)$$

Veja que as equações (21) e (22) são parecidas com a equação (19), a equação do plano tangente à superfície de  $z = f(x, y)$ . A transformada linear  $T$  irá fornecer, de acordo com Flemming e Gonçalves (2005), uma aproximação para o acréscimo  $\Delta z$  sofrido pela função, quando se passa de  $(x_0, y_0)$  para  $(x, y)$ . Então:

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) \cong h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (23)$$

Flemming e Gonçalves (2005) ainda indicam que é comum usar a notação  $\Delta x = h = x - x_0$  e  $\Delta y = k = y - y_0$  na diferencial apresentada em (23), de modo a deixar mais claro

que se tem a diferencial de  $z = f(x, y)$  em  $(x_0, y_0)$  relativa a acréscimos  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . Tomando uma notação ainda mais clássica, pode-se fazer os acréscimos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  serem muito pequenos de forma que o operador  $\Delta$  se torne uma derivada, ou seja,  $\Delta x = dx$  e  $\Delta y = dy$ . Com isso, pode-se encontrar a **diferencial total** da função  $z = f(x, y)$ :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \quad (24)$$

**Exemplo 2.5:** Calcule a diferencial da função  $f(x, y) = x^2y + \sqrt{xy}$  no ponto  $(1, 1)$ .

### Solução

Primeiro, deve-se avaliar as derivadas parciais de tal função:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{\sqrt{1}}{2\sqrt{1}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1^2 + \frac{\sqrt{1}}{2\sqrt{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Agora, basta usar a equação (21):

$$T(x - 1, y - 1) = (x - 1)\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) + (y - 1)\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$$

$$T(x - 1, y - 1) = (x - 1)\frac{5}{2} + (y - 1)\frac{3}{2}$$

Você ainda pode utilizar a notação clássica para representar essa diferencial, usando a Equação (24):

$$df = \frac{5}{2}dx + \frac{3}{2}dy$$

As diferenciais de uma função são úteis para se calcular aproximações. A seguir é mostrado um exemplo dessa aplicação das diferenciais, em que esta é aplicada para estimar variações na área de polígonos.

**Exemplo 2.6:** Seja um retângulo de lados iguais a 5 e 2 cm, respectivamente. Qual será a variação da área, aproximadamente, se os lados forem modificados para 5,02 e 2,005 cm?

### Solução

Considerando que um retângulo genérico tem lados de tamanho  $x$  e  $y$ , respectivamente, então sua área será  $A = xy$ . Para tal função, tem-se as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y \quad \text{e} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = x$$

Agora, para estimar a variação da área quando se modificam as dimensões do retângulo, você pode utilizar a Equação (24), ou seja, a diferencial total da função:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = ydx + xdy$$

Considerando  $x = 5$ , então tem-se que  $y = 2$ . Logo, pode-se dizer que, de forma aproximada,  $dx = 5,02 - 5 = 0,02$  cm e  $dy = 2,005 - 2 = 0,005$  cm. Assim, pode-se estimar a variação da área:

$$dA = 2 \cdot 0,02 + 5 \cdot 0,005 = 0,065 \text{ cm}^2$$

Ou seja, quando as dimensões do retângulo variam de 5 para 5,02 cm e de 2 para 2,005 cm, a área desse retângulo deve sofrer um acréscimo de aproximadamente  $0,65 \text{ cm}^2$ .

### ATIVIDADE

2) Analisar a diferencial de uma função é algo que lhe fornecerá uma estimativa de como uma função irá se comportar com pequenas alterações de suas variáveis. Sendo assim, visando fixar este conceito, considere que uma empresa fabrica caixas cilíndricas, sendo que o custo de matéria-prima para essa caixa é de R\$ 0,07 cada  $10 \text{ cm}^2$ . Analise as alternativas a seguir e assinale a correta.

- Se as dimensões da caixa variarem um pouco, você pode estimar o custo aproximado da nova caixa utilizando a equação  $dC = 0,007[(2\pi h + 2\pi r)dr + (2\pi r)dh]$ .
- Para uma caixa com  $r = 5 \text{ cm}$  e  $h = 10 \text{ cm}$ , se o raio aumentar 2% e a altura

- aumentar 5%, o aumento do custo da nova caixa será de aproximadamente R\$ 0,20.
- c) Para uma caixa com  $r = 5 \text{ cm}$  e  $h = 10 \text{ cm}$ , se o raio aumentar 2% e a altura aumentar 5%, o aumento do custo da nova caixa será de aproximadamente R\$ 0,10.
- d) Para uma caixa com  $r = 2 \text{ cm}$  e  $h = 5 \text{ cm}$ , se o raio aumentar 5% e a altura aumentar 2%, o custo da nova caixa será de aproximadamente R\$ 0,20.
- e) Se as dimensões da caixa variarem um pouco, você pode estimar o custo aproximado da nova caixa utilizando a equação  $dC = 0,07[(2\pi h)dr + (2\pi r)dh]$ .

### Regra da cadeia

Assim como você já estudou para casos de funções de uma única variável, você também verá casos de funções compostas em funções de mais de uma variável, sendo que é possível se ver com a necessidade de avaliar a derivada dessa função. Por exemplo, sendo a função  $y = f(x)$  uma função diferenciável de  $x$  e  $x = g(t)$  uma função diferenciável de  $t$ , então a função  $y$  é diferenciável em relação a  $t$ , sendo, segundo Thomas Júnior (2016), essa derivada avaliada pela *regra da cadeia*, da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Você pode pensar na função  $y$  como  $y = f(g(t))$ , ou seja, a variável  $x$  pode ser vista como uma variável intermediária, visto que  $x$  depende de  $t$ .

Para introduzir, agora, a ideia da regra da cadeia para funções com mais de uma variável, Morettin, Hazzan e Bussab (2016) apresentam o seguinte exemplo. Considere que a produção de uma empresa pode ser representada pela seguinte função:

$$P(x, y) = 6x^{1/2}y^{1/2}$$

Em que  $x$  representa o capital e  $y$  representa o trabalho investido. Tanto o capital quanto o trabalho podem ser representados como funções do tempo, na forma  $x = f(t) = 0,16t$  e  $y = g(t) = 0,09t$ . Assim, a função produção também pode ser reescrita como uma função do tempo:

$$P(t) = 6(0,16t)^{1/2}(0,09t)^{1/2} = 0,72(t^2)^{1/2} = 0,72t$$

Note que a derivada de  $P(t)$  pode ser encontrada diretamente, sendo  $P'(t) = 0,72$ . No entanto, nem sempre essa substituição poderá ser feita de forma simples, sendo prático que você saiba como avaliar a derivada de uma função composta de forma direta, sem precisar reescrever a função em questão. Para tal, usaremos também a regra da cadeia.

Vejamos, então, como pode-se aplicar a regra da cadeia para funções com mais de uma variável. Stewart (2017b) indica que existem diversas versões da regra da cadeia para funções com mais de uma variável. Estudaremos alguns desses casos, sendo o primeiro deles aquele em que a função  $z = f(x, y)$  apresenta ambas variáveis como funções de outra mesma variável, ou seja,  $x = g(t)$  e  $y = h(t)$ . Assim, conforme descrito anteriormente, a função  $z$  é indiretamente função de  $t$ , sendo  $x$  e  $y$  variáveis intermediárias. Pode-se, então, escrever a função  $z$  como sendo  $z = f(g(t), h(t))$ . Nesse caso, Flemming e Gonçalves (2005) e Stewart (2017b) propõem a seguinte definição:

**Definição 7:** considere os conjuntos  $A \in \mathbb{R}^2$  e  $B \in \mathbb{R}$ , ambos abertos. Se, então, a função  $z = f(x, y)$  admite derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em  $A$ , ou seja,  $z$  é diferenciável em relação a  $x$  e  $y$ , e se essas variáveis  $x$  e  $y$  são funções de  $t$  diferenciáveis em  $B$ , ou seja, em relação a  $t$ , então, para qualquer  $t \in B$ , tem-se que  $(x(t), y(t)) \in A$ . Logo,  $z$  será diferenciável para qualquer  $t \in B$  e:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (25)$$

**Exemplo 3.1:** Seja a função  $z = f(x, y) = x^2y + x$ , para a qual se tem que  $x(t) = t$  e  $y(t) = t + 2$ . Verifique a fórmula da regra da cadeia para esse caso.

### Solução

Verificar a fórmula simplesmente é verificar que a Equação (25) é verdadeira. Assim, primeiro vamos avaliar  $z(t)$ :

$$z(t) = (t)^2(t + 2) + (t) = t^3 + 2t^2 + t = t^3 + 3t$$

Avaliando a derivada de  $z$  em relação a  $t$ :

$$\frac{dz}{dt} = 3t^2 + 4t + 1$$

Agora, avaliando as demais derivadas que são apresentadas em (25):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 1$$

Disso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} &= (2xy + 1) \cdot (1) + (x^2) \cdot (1) \\ &= 2xy + 1 + x^2 \end{aligned}$$

Como  $x(t) = t$  e  $y(t) = t + 2$ , então:

$$\begin{aligned} 2xy + 1 + x^2 &= 2 \cdot (t) \cdot (t + 2) + 1 + (t)^2 \\ &= 2t^2 + 4t + t^2 + 1 = 3t^2 + 4t + 1 \end{aligned}$$

Então, como mostramos que:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Podemos afirmar que verificamos a regra da cadeia.

**Exemplo 3.2:** Seja a função  $z = f(x, y) = xy + \ln x^2 y^2$ , para a qual se tem que  $x(t) = t^2$  e  $y(t) = t$ , encontre  $dz/dt$  utilizando a regra da cadeia.

### Solução

Para encontrar tal derivada utilizando a regra da cadeia, basta aplicar a Equação (25).

Assim, avaliando as derivadas necessárias:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{2}{y} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 1$$

Agora, basta resolver a Equação (25):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \left(y + \frac{2}{x}\right) \cdot (2t) + \left(x + \frac{2}{y}\right) \cdot (1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2ty + \frac{4t}{x} + x + \frac{2}{y} = \frac{4t + x^2}{x} + \frac{2ty^2 + 2}{y} \\
 &= \frac{4ty + x^2y + 2txy^2 + 2x}{xy} = \frac{t(4y + 2xy^2) + x(xy + 2)}{xy}
 \end{aligned}$$

Como  $x(t) = t^2$  e  $y(t) = t$ , então:

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dt} &= \frac{t(4t + 2t^2t^2) + t^2(t^2t + 2)}{t^2t} \\
 &= \frac{4t^2 + 2t^5 + t^2(t^3 + 2)}{t^2t} = \frac{4 + 2t^3 + t^3 + 2}{t} = \frac{3t^3 + 6}{t}
 \end{aligned}$$

O segundo caso é aquele no qual a função  $z = f(x, y)$  apresenta ambas variáveis como funções de outras duas variáveis, ou seja,  $x = g(s, t)$  e  $y = h(s, t)$ . Assim, a função  $z$  é indiretamente função de  $s$  e  $t$ , sendo  $x$  e  $y$  variáveis intermediárias. Pode-se, então, escrever a função  $z$  como sendo  $z = f(g(s, t), h(s, t))$ . Para esse caso, Flemming e Gonçalves (2005) e Stewart (2017b) propõem a seguinte definição:

**Definição 7:** considere os conjuntos  $A, B \in \mathbb{R}^2$ , ambos abertos. Se, então, a função  $z = f(u, v)$  admite derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em  $A$ , ou seja,  $z$  é diferenciável em relação a  $u = u(x, y)$  e  $v = v(x, y)$ , e se essas variáveis  $u$  e  $v$  são diferenciáveis em  $B$  tais que, para qualquer  $(x, y) \in B$ , tem-se que  $(u(x, y), v(x, y)) \in A$ . Logo,  $z$  será diferenciável para qualquer  $(x, y) \in B$  e:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (26)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad (27)$$

**Exemplo 3.3:** Seja a função  $z = f(u, v) = v^2 + u - v$ , para a qual se tem que  $u(x, y) = x + 2y$  e  $v(y, x) = x^2y^2$ . Verifique a fórmula da regra da cadeia para esse caso.

**Solução**

Verificar a fórmula simplesmente é verificar que as equações (26) e (27) são verdadeiras.

Assim, primeiro vamos avaliar  $z(x, y)$ :

$$\begin{aligned}z(x, y) &= (x^2y^2)^2 + (x + 2y) - (x^2y^2) \\ &= x^4y^4 + x + 2y - x^2y^2\end{aligned}$$

Avaliando a derivada parcial de  $z$  em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3y^4 + 1 - 2xy^2$$

E agora a derivada parcial de  $z$  em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^4y^3 + 2 - 2x^2y$$

Agora, avaliando as demais derivadas que são apresentadas nas equações (26) e (27):

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 1 \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad \frac{dv}{dx} = 2xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 2v - 1 = 2x^2y^2 - 1 \quad \frac{du}{dy} = 2 \quad \frac{dv}{dy} = 2x^2y$$

Aplicando-as no lado direito de (26):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= (1) \cdot (1) + (2x^2y^2 - 1) \cdot (2xy^2) \\ &= 1 + 4x^3y^4 - 2xy^2\end{aligned}$$

E no lado direito de (27):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} &= (1) \cdot (2) + (2x^2y^2 - 1) \cdot (2x^2y) \\ &= 2 + 4x^4y^3 - 2x^2y\end{aligned}$$

Então, comparando os resultados encontrados, mostramos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

**Exemplo 3.4:** Seja a função  $z = f(u, v) = e^u \cos v$ , para a qual se tem que  $u(x, y) = xy^2$  e  $v(x, y) = x^2y$ , com a regra da cadeia, encontre  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ .

### Solução

Para encontrar  $\partial z/\partial x$  utilizando a regra da cadeia, basta usar a Equação (26). Assim, avaliando as derivadas necessárias:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = e^u \cos v = e^{xy^2} \cos x^2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -e^u \sin v = -e^{xy^2} \sin x^2y$$

$$\frac{du}{dx} = y^2 \quad \frac{dv}{dx} = 2xy$$

Resolvendo a Equação (26):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (e^{xy^2} \cos x^2y) \cdot (y^2) + (-e^{xy^2} \sin x^2y) \cdot (2xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^{xy^2} \cos x^2y - 2xy e^{xy^2} \sin x^2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy^2} (y \cos x^2y - 2x \sin x^2y)$$

Para encontrar  $\partial z/\partial y$  utilizando a regra da cadeia, basta usar a equação (27). Assim, avaliando as demais derivadas necessárias:

$$\frac{du}{dy} = 2xy \quad \frac{dv}{dy} = x^2$$

Resolvendo a equação (27):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (e^{xy^2} \cos x^2y) \cdot (2xy) + (-e^{xy^2} \sin x^2y) \cdot (x^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy e^{xy^2} \cos x^2y - x^2 e^{xy^2} \sin x^2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy^2} (2y \cos x^2y - x \sin x^2y)$$

Após termos estudado esses dois casos, pode-se apresentar uma generalização para a regra da cadeia. Para esse caso generalizado, Stewart (2017b) propõe a seguinte definição:

**Definição 8:** considere que  $z$  seja uma função diferenciável de  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , para a qual se tem que cada variável  $x_j$  seja uma função diferenciável de  $m$  variáveis  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Tem-se então que  $z$  também é uma função de  $t_1, t_2, \dots, t_m$  para a qual se tem que a derivada parcial em relação à  $i$ -ésima variável  $t_i$  será encontrada por:

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \quad (28)$$

Para a qual  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Exemplo 3.5:** Escreve a regra da cadeia para uma função  $z = f(x, y, w, s)$ , para a qual se tem que  $x = x(u, v, r)$ ,  $y = y(u, v, r)$ ,  $w = w(u, v, r)$  e  $t = t(u, v, r)$ .

### Solução

Para esse caso, temos uma equação  $z$  com quatro variáveis, sendo que cada uma dessas variáveis é uma função de outras três variáveis. Então, de acordo com o que foi enunciado na definição 8, tem-se  $n = 4$  e  $m = 3$ , as quais podem ser identificadas como  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = w$  e  $x_4 = s$  e  $t_1 = u$ ,  $t_2 = v$  e  $t_3 = r$ .

Precisamos, então, encontrar  $\partial z/\partial u$ ,  $\partial z/\partial v$  e  $\partial z/\partial r$  utilizando a Equação (28). Para a primeira variável, ou seja, para  $u$ , tem-se:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u}$$

E para a segunda variável, ou seja, para  $v$ :

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial v}$$

E, finalmente, para a terceira variável, ou seja, para  $r$ :

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial r}$$

**Exemplo 3.6:** Seja a função  $w = x^2 + y^2 + z$ , para a qual se tem que  $x = r \cdot \text{sen } \theta$ ,  $y = r \cdot \text{cos } \gamma$  e  $z = r\theta\gamma$ , encontre as derivadas parciais de  $z$ .

### Solução

Para esse caso, temos uma equação  $z$  com três variáveis, sendo que cada uma é uma função de outras três variáveis. Então, de acordo com o que foi enunciado na definição 8, tem-se  $n = m = 3$ , as quais podem ser identificadas como  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $x_3 = z$  e  $t_1 = r$ ,  $t_2 = \theta$  e  $t_3 = \gamma$ .

Precisamos, então, encontrar  $\partial w / \partial r$ ,  $\partial w / \partial \theta$  e  $\partial w / \partial \gamma$  utilizando a equação (28). Para  $r$ , tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

Para  $\theta$ :

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

E para  $\gamma$ :

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma}$$

Temos, então, todas as três derivadas parciais para a função indicada. Agora, podemos avaliá-las. Para facilitar, vamos avaliar, antes, as derivadas parciais que aparecem nas equações que encontramos.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x = 2r \cdot \text{sen } \theta \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2y = 2r \cdot \text{cos } \gamma \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \text{sen } \theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cdot \text{cos } \theta \quad \frac{\partial x}{\partial \gamma} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \text{cos } \gamma \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial \gamma} = -r \cdot \text{sen } \gamma$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \theta\gamma \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = r\gamma \quad \frac{\partial z}{\partial \gamma} = r\theta$$

Basta, então, substituir as derivadas acima nas equações encontradas. Para  $\partial w / \partial r$ :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = (2r \cdot \text{sen } \theta) \cdot (\text{sen } \theta) + (2r \cdot \text{cos } \gamma) \cdot (\text{cos } \gamma) + (1) \cdot (\theta\gamma)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 2r \cdot (\text{sen } \theta)^2 + 2r \cdot (\text{cos } \gamma)^2 + \theta\gamma$$

Para  $\partial w/\partial \theta$ :

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = (2r \cdot \text{sen } \theta) \cdot (r \cdot \text{cos } \theta) + (2r \cdot \text{cos } \gamma) \cdot (0) + (1) \cdot (r\gamma)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 2r^2 \cdot \text{sen } \theta \cdot \text{cos } \theta + r\gamma$$

Para  $\partial w/\partial \gamma$ :

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma} = (2r \cdot \text{sen } \theta) \cdot (0) + (2r \cdot \text{cos } \gamma) \cdot (-r \cdot \text{sen } \gamma) + (1) \cdot (r\theta)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma} = -2r^2 \cdot \text{sen } \gamma \cdot \text{cos } \gamma + r\theta$$

## REFLITA

A regra da cadeia pode parecer um processo complexo e de dificuldade considerável para se avaliar derivadas de funções compostas, visto que você pode reescrever a função substituindo suas variáveis intermediárias. Qual, então, é o sentido em desenvolver toda essa teoria sobre a regra da cadeia?

## ATIVIDADE

- 3) Você foi convidado para analisar a pressão  $P$  de um gás ideal em um experimento laboratorial, cuja reação ocorre em um recipiente esférico de volume  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Para tal, você identificou que a temperatura da reação varia com o tempo de reação  $t$ , a posição radial no recipiente  $r$  de acordo com a relação  $T = 70 - t \cdot \ln r$  e o número de mols na reação depende linearmente do tempo de reação de acordo com a relação  $n = 0,2t$ . Sabendo que a pressão de um gás ideal se comporta de acordo com a equação dos gases ideais, apresentada a seguir, analise as alternativas e assinale a correta. O valor  $R$  é uma constante.

$$P = \frac{nRT}{V}$$

- a) Essa função  $P$  pode ser completamente analisada com no mínimo 3 derivadas parciais.
- b) A derivada parcial de  $P$  em relação ao tempo é:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{3R}{2\pi r^3} [7 - 0,2t \cdot \ln r]$$

- c) A derivada parcial de  $P$  em relação ao tempo  $t$  é

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{21R}{2\pi r^3}$$

- d) A derivada parcial de  $P$  em relação ao raio  $r$  é:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{3Rt}{20\pi r^4} [t(1 - \ln r) + 210]$$

- e) A função  $P$  dada apresenta duas variáveis intermediárias que são funções de três variáveis.

## DERIVADAS PARCIAIS SUCESSIVAS

Agora é o momento de concluirmos os estudos de derivadas de funções com mais de uma variável. Portanto, agora, vamos estudar a derivação implícita de funções com mais de uma variável e, em seguida, aprenderemos como avaliar derivadas parciais de ordem superior.

### Derivação implícita

Ao estudar funções com uma única variável, você se deparou com casos em que uma função  $y = f(x)$  pode ser expressa de maneira implícita, ou seja, em uma forma  $F(x, y) = 0$ . Note que, nessa definição, substituindo  $y = f(x)$ , fará com que você tenha uma identidade (FLEMMING; GONÇALVES, 2005).

Assim, de forma análoga a esta, Flemming e Gonçalves (2005) dizem que uma função  $z = f(x, y)$  também pode ser representada de forma implícita como  $F(x, y, z) = 0$ . Novamente, a substituição de  $z$  por  $f(x, y)$  faz com que se tenha uma identidade. Um exemplo disso, uma função  $z = \sqrt{x^3 + 2y^2}$  pode ser escrita implicitamente como  $x^3 + 2y^2 - z^2 = 0$ .

Outros casos de funções com mais de uma variável definidas implicitamente mostrados por Flemming e Gonçalves (2005) são o de um sistema de duas equações. O primeiro desses casos é aquele em que se tem duas equações simultâneas, como:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Note que esse sistema pode definir implicitamente duas funções de uma variável,  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$ . Já o sistema

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

pode definir de forma implícita duas funções com duas variáveis, ou seja,  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$ .

Veja que é possível que funções de mais de uma variável sejam expressas de forma implícita, mas nem sempre é possível escrever uma função implícita de forma explícita.

Então, devemos analisar como encontrar derivadas de funções nesse caso. Vejamos os quatro casos de funções implícitas descritas acima.

### Derivando a função $y = f(x)$ definida por $F(x, y) = 0$

Iniciaremos nosso estudo com o caso da função  $y = f(x)$ , que pode ser definida implicitamente pela função:

$$F(x, y) = 0 \quad (29)$$

Se  $f$  e  $F$  forem funções diferenciáveis e no ponto  $(x, f(x))$  tem-se que  $\partial F/\partial y \neq 0$ , Flemming e Gonçalves (2005) dizem que a derivada  $dy/dx$  pode ser encontrada derivando-se (29) em relação a  $x$  fazendo uso da regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (30)$$

**Exemplo 4.1:** Seja a função de uma circunferência de raio 1 e centro na origem apresentada a seguir, encontre a derivada parcial  $dy/dx$ .

$$x^2 + y^2 = 1$$

### Solução

Essa função da circunferência é uma função implícita na forma  $F(x, y) = 0$ , para a qual se tem  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Apesar de essa função poder ser representada na forma explícita como  $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ , vamos considerar encontrar a derivada utilizando a técnica de derivação implícita, ou seja, usaremos a Equação (30). Para tal, precisamos de algumas derivadas parciais da função  $F(x, y)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

Agora, usando, então, a Equação (30):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Observe que esse resultado só é válido para  $y \neq 0$ . Caso deseje comprovar esse resultado, derive a função  $y$  escrita explicitamente acima e compare o resultado encontrado.

### Derivando a função $y = f(x, y)$ definida por $F(x, y, z) = 0$

Para uma função  $z = f(x, y)$ , definida implicitamente pela função:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{31}$$

Se  $f$  e  $F$  forem funções diferenciáveis e no ponto  $(x, y, f(x, y))$ , tem-se, então, que  $\partial F/\partial z \neq 0$ . Disso, Fleming e Gonçalves (2005) dizem que as derivadas parciais  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$  podem ser encontradas com a regra da cadeia. Assim, derivando (31) em relação a  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \end{aligned} \tag{32}$$

E derivando (30) em relação a  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \end{aligned} \tag{33}$$

**Exemplo 4.2:** Seja a função  $z = f(x, y)$  diferenciável e definida pela equação a seguir, encontre as derivadas parciais de  $z$ .

$$x^3y + 2y^2 + z^3 + 3z = 6$$

## Solução

Note que essa função  $z$  está definida implicitamente na forma  $F(x, y, z) = 0$ , para a qual se tem  $F(x, y, z) = x^3y + 2y^2 + z^3 + 3z - 6$ . Logo, a função  $z$  apresentará as derivadas parciais  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$ . Para essa função  $F(x, y, z)$ , observe que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + 4y \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 3$$

Veja que apenas as equações (32) e (33) são necessárias para encontrarmos as derivadas parciais de uma função na forma implícita. Assim, de (32):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{3x^2y}{3z^2 + 3} = -\frac{x^2y}{z^2 + 1}$$

E, de (33):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{x^3 + 4y}{3z^2 + 3} = -\frac{x^3 + 4y}{3(z^2 + 1)}$$

**Derivando a função  $y = f(x, y)$  definida por um sistema** 
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Vejamos o caso de duas funções  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$  serem definidas de forma implícita por um sistema de duas equações como:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Se  $F$  e  $G$  forem funções diferenciáveis, as derivadas parciais  $dy/dx$  e  $dz/dx$  podem ser encontradas simplesmente derivando (34) em relação a  $x$  usando a regra da cadeia. Dessa forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x} \end{cases} \quad (35)$$

Observe que o sistema apresentado em (35) é um sistema linear com incógnitas iguais a  $dy/dx$  e  $dz/dx$ . De acordo com Flemming e Gonçalves (2005), você pode fazer uso da **regra de Cramer** para encontrar a solução desse sistema. Com isso, deve encontrar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ -\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad (36)$$

e

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & -\frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad (37)$$

Os termos entre as barras indicam o determinante da matriz, sendo que os determinantes em (36) e (37) são conhecidos como **jacobianos**, segundo Flemming e Gonçalves (2005), e você certamente lidará com jacobianos em outros assuntos mais avançados que fazem uso do cálculo.

**Exemplo 4.3:** Sejam as funções  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$ , em que  $z > 0$ , diferenciáveis e definidas pelo sistema a seguir. Encontre as derivadas  $dy/dx$  e  $dz/dx$ .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

**Solução**

Temos um caso semelhante ao descrito pela equação (34), para o qual se tem  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  e  $G(x, y, z) = x + y - 4$ . Assim, pode-se avaliar as derivadas pedidas com as equações (36) e (37). Para isso, precisamos de algumas derivadas parciais das funções:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

Então, para  $dy/dx$ :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & -2z \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & -2z \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = -1$$

E, para  $dz/dx$ :

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & -2z \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{2y - 2x}{2z} = \frac{x - y}{z}$$

**Derivando as funções  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  definidas por** 
$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

Esta situação é ligeiramente semelhante àquela discutida na seção anterior. Nesse caso, considere que as funções  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  são definidas implicitamente pelo sistema apresentado em (38):

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Se as funções  $F$  e  $G$  forem diferenciáveis, as derivadas parciais  $\partial x/\partial u$ ,  $\partial x/\partial v$ ,  $\partial y/\partial u$  e  $\partial y/\partial v$  podem ser encontradas aplicando a regra da cadeia em (38). Então, mantendo a variável  $v$  como uma constante e tomando a derivada em relação a  $u$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

Note que no sistema acima tem-se  $\partial u/\partial u = 1$  e  $\partial v/\partial u = 0$ . Então:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial G}{\partial u} \end{cases} \quad (39)$$

Novamente, o sistema apresentado em (39) é um sistema linear com incógnitas iguais a  $\partial x/\partial u$  e  $\partial y/\partial u$ . Usando, então, a regra de Cramer:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \quad (40)$$

Lembre-se que (40) é válida para denominadores não nulos. Tanto quanto no caso da seção 4.1.3, temos um jacobiano como resultado. Fazendo um processo análogo a este, mas mantendo agora a variável  $u$  constante, você encontrará:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \quad (41)$$

**Exemplo 4.4:** Sejam as funções  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  diferenciáveis, definidas pelo sistema a seguir, encontre as derivadas parciais de  $x$  e  $y$  em relação a  $u$  e  $v$ .

$$\begin{cases} x^2 - 2u - 2v = 0 \\ y - 2u + v = 0 \end{cases}$$

### Solução

Para esse sistema, tem-se que  $F(x, y, u, v) = x^2 - 2u - 2v$  e  $G(x, y, u, v) = y - 2u + v$ . As derivadas pedidas podem ser encontradas com as equações (40) e (41). Para isso, precisamos de algumas derivadas parciais das funções:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial u} = -2 \quad \frac{\partial F}{\partial v} = -2$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial G}{\partial u} = -2 \quad \frac{\partial G}{\partial v} = 1$$

Então, para  $\partial x/\partial u$  e  $\partial y/\partial u$ , de (40):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{-2 - 0}{2x - 0} = \frac{1}{x}$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{-4x - 0}{2x - 0} = 2$$

Agora, para  $\partial x/\partial v$  e  $\partial y/\partial v$ , de (41):

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{-2 - 0}{2x - 0} = \frac{1}{x}$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2x - 0}{2x - 0} = 1$$

### Derivadas parciais sucessivas

Após todo o desenvolvimento teórico sobre as derivadas de primeira ordem, você certamente estudou o caso de tomar a derivada de uma função mais de uma vez, gerando derivadas de ordens superiores. Esse procedimento também pode ser expandido para o caso das funções com mais de uma variável.

Segundo Stewart (2017b), se uma função  $z = f(x, y)$  é diferenciável, então, suas derivadas parciais de 1ª ordem também devem ser funções de duas variáveis, ou seja,  $\partial f/\partial x = f_x(x, y)$  e  $\partial f/\partial y = f_y(x, y)$ . Logo, nada nos impede de tomar uma nova derivada dessas funções em relação a uma de suas variáveis. Essa derivada parcial de uma derivada parcial de 1ª ordem é chamada **derivada parcial de 2ª ordem**.

Para uma função  $z = f(x, y)$ , pode-se ter quatro derivadas parciais de 2ª ordem, pois as derivadas parciais de 1ª ordem podem ser derivadas em relação a qualquer uma de suas

variáveis, ou seja, pode-se derivar  $\partial f/\partial x$  em relação a  $x$  ou  $y$ , assim como  $\partial f/\partial y$  também pode ser derivada em relação a  $x$  ou  $y$ . Essas derivadas de 2ª ordem podem ser representadas das seguintes formas:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx} = f_{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (f_x)_y = f_{xy} = f_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (f_y)_y = f_{yy} = f_{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (f_y)_x = f_{yx} = f_{21}$$

Nessas notações, observe que  $f_{xy}$  significa que você deve derivar primeiro em relação à variável  $x$  e, depois, em relação à variável  $y$ . De modo análogo, para a notação  $f_{yx}$ , significa que você deve derivar, primeiro, em relação à variável  $y$ , e, depois, em relação à variável  $x$ .

**Exemplo 4.5:** Determine as derivadas parciais de 2ª ordem da função a seguir.

$$f(x, y) = 2x^4y - x^3y^2 + xy^3$$

### Solução

Primeiro, você deve avaliar as derivadas parciais de 1ª ordem da função indicada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3y - 3x^2y^2 + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^4 - 2x^3y + 3xy^2$$

Agora, podemos encontrar as derivadas de 2ª ordem. Derivando  $\partial f/\partial x$  em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (8x^3y - 3x^2y^2 + y^3) = 24x^2y - 6xy^2$$

E em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (8x^3y - 3x^2y^2 + y^3) = 8x^3 - 6x^2y + 3y^2$$

Finalmente, derivando  $\partial f / \partial y$  em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^4 - 2x^3y + 3xy^2) = 8x^3 - 6x^2y + 3y^2$$

E em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2x^4 - 2x^3y + 3xy^2) = -2x^3 + 6xy$$

Note que, no Exemplo 4.5, as derivadas  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  são iguais. Segundo Stewart (2017b), isso não é simples coincidência, é algo corriqueiro para diversas funções. O matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765) enunciou um teorema que fornece condições para identificar se as derivadas  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  serão iguais em uma função:

**Teorema de Clairaut:** seja a função  $f$  definida em uma bola aberta  $A$ , que contenha o ponto  $(x_0, y_0)$ . Se as funções  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  forem contínuas em  $D$ , então  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$  (STEWART, 2017b).

Flemming e Gonçalves (2005) apresentam uma definição semelhante a essa, conhecida como *teorema de Schwarz*, que leva à mesma conclusão do teorema de Clairaut. Também é comum que esse teorema seja enunciado como *teorema de Clairaut-Schwarz*.

Cabe dizer, também, que você pode continuar derivando funções quantas vezes você quiser, obtendo, assim, derivadas parciais de ordem superior. O procedimento para se encontrar essas derivadas parciais de ordem superior é o mesmo descrito para se encontrar as derivadas parciais de 2ª ordem.

## ATIVIDADE

4) A derivação implícita é um tipo de derivação que algumas pessoas apresentam certa dificuldade em lidar. Visando praticar esse assunto e melhor fixá-lo, considere as funções a seguir, e analise as alternativas e assinale a correta.

I)  $x^2y^2 + \ln xy + z^3 = 8$

II)  $6x^3 + 2y^4 = 36$

III)  $x^2z + \ln x^4y + xyz^2 = 0$

a) A derivada parcial  $\partial z/\partial x$  da função I é igual a  $-\frac{2x^2y+1/x}{3z^2}$ .

b) A derivada parcial  $\partial z/\partial x$  da função III é igual a  $-\frac{2xz+yz^2+4/x}{x^2+xyz}$ .

c) A derivada parcial  $\partial z/\partial y$  da função I é igual a  $-\frac{2xy^2+1/y}{3z^2}$ .

d) A derivada parcial  $dy/dx$  da função II é igual a  $-\frac{9x^2}{8z^3}$ .

e) A derivada parcial  $\partial z/\partial y$  da função III é igual a  $-\frac{xz^2+1/y^2}{x^2+xyz}$ .

## INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: *Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície*

Editora: Makron Books

Autor: FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B.

ISBN: 9788576051169

Comentário: O livro apresenta explicações extremamente benfeitas e com diversos exemplos, inclusive gráficos. Livro de apoio muito bom e focado no estudo de funções de mais de uma variável.

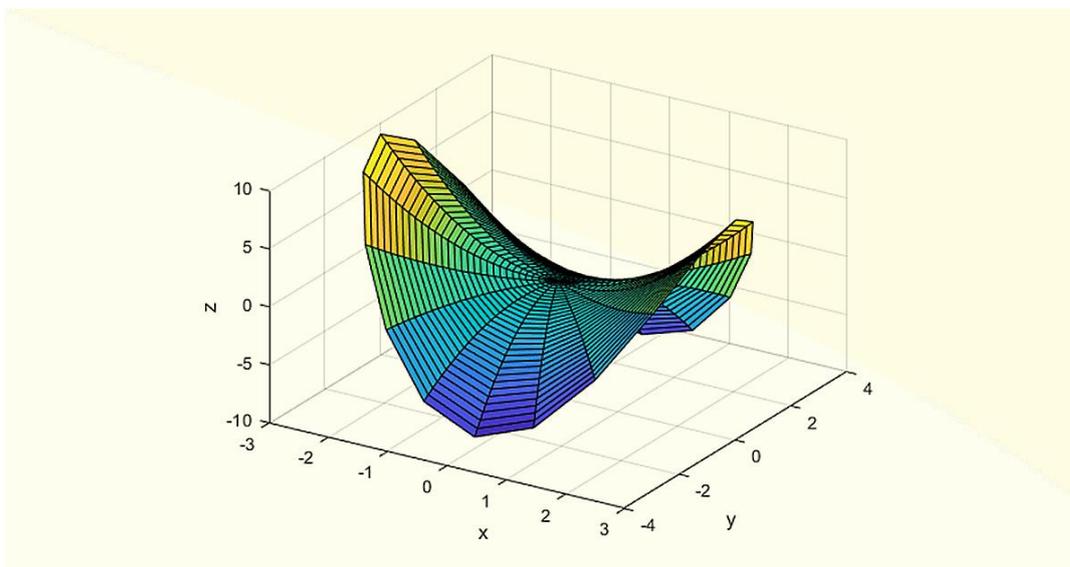
UNIDADE III

# Máximos e mínimos de funções com mais de uma variável

*Renam Luis Acorsi*

## Introdução

O estudo de funções de uma única variável pode ser expandido e aplicado para casos de funções de mais de uma variável. Portanto, na presente Unidade, vamos ampliar as aplicações de derivadas para a análise de funções de duas variáveis. Inicialmente, discutiremos a respeito dos máximos e mínimos de funções com mais de uma variável, iniciando os estudos com um embasamento teórico, partindo, então, para a aplicação do conceito de derivadas para auxiliar na determinação de pontos críticos para, então, aprender a determinar quais pontos críticos são pontos extremantes e quais são pontos de sela. Fundamentada a teoria de determinação dos tipos de pontos críticos de uma função, estudaremos a aplicação desses conceitos com alguns exemplos.



Fonte: Denis Ismagilov / 123RF.

## PONTOS DE MÁXIMO E MÍNIMO

Assim como você estudou nos casos de funções com apenas uma variável, uma das principais aplicações das derivadas de 1ª ordem se encontra na análise de uma função, permitindo a você identificar os valores máximos e mínimos de uma função. Como você já deve ter percebido, a derivada parcial de 1ª ordem para funções com duas ou mais variáveis também pode ser utilizada com esta finalidade (STEWART, 2017). Logo, a presente unidade será dedicada a esse tipo de aplicação das derivadas parciais.

### Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Os valores de máximo e mínimo de uma função podem ocorrer tanto nas regiões fronteiriças quanto nas regiões internas da representação gráfica de uma função. Inicialmente, será desenvolvida a análise desses pontos dentro de uma região. Para ilustrar esses casos de pontos de mínimo e máximo de uma função, considere a função genérica  $z = f(x, y)$  e o conjunto de pontos  $A$ , representados geometricamente conforme mostra a Figura 3.1 a seguir:

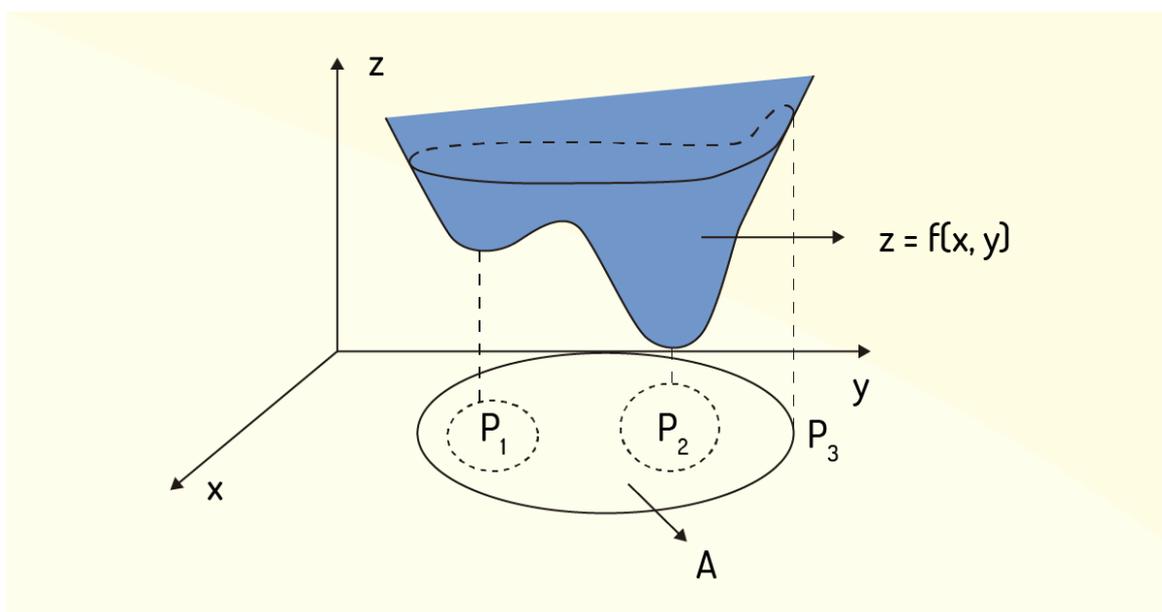


Figura 3.1 - Representação geométrica de uma função  $z = f(x, y)$

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 161).

Observando os pontos  $(x, y)$  delimitados pela região  $A$ , é possível notar que, nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , a função  $z$  apresentará valores mínimos. Já o ponto  $P_3$ , que se encontra na fronteira desse conjunto  $A$ , é um ponto de máximo. Dessa imagem e breve análise, Flemming e Gonçalves (2005) propõem as seguintes definições:

**Definição 1 - máximo global ou absoluto:** seja uma função  $z = f(x, y)$  qualquer, cujo domínio seja  $D_f$ . Então, o ponto  $(x_0, y_0) \in D_f$  é um ponto de máximo global ou absoluto se, para qualquer outro ponto  $(x, y) \in D_f$ , tem-se que  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ . Logo, pode-se afirmar que  $f(x_0, y_0)$  é o valor máximo de  $f$ .

**Definição 2 - mínimo global ou absoluto:** seja uma função  $z = f(x, y)$  qualquer, cujo domínio seja  $D_f$ . Então, o ponto  $(x_0, y_0) \in D_f$  é um ponto de mínimo global ou absoluto se, para qualquer outro ponto  $(x, y) \in D_f$ , tem-se que  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ . Logo, pode-se afirmar que  $f(x_0, y_0)$  é o valor mínimo de  $f$ .

**Exemplo 1.1:** Considere o parabolóide definido pela função  $z = 9 - x^2 - y^2$ . Qual deverá ser o máximo absoluto dessa função?

### Solução

A representação gráfica desse parabolóide, conforme na Figura 3.2, provavelmente já é familiar a você.

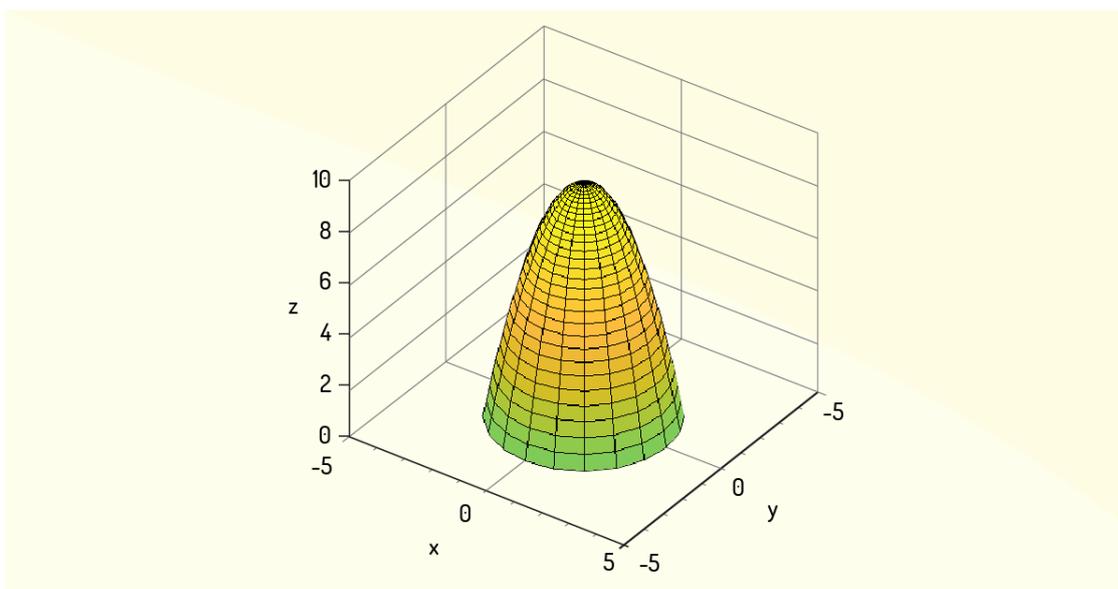


Figura 3.2 - Representação geométrica da função  $z = 9 - x^2 - y^2$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando tal gráfico, fica simples deduzir que o valor máximo absoluto dessa função irá ocorrer no ponto  $(0,0)$ , para o qual se tem que  $z = 9$ . Isso pode ser comprovado pela Definição 1, pois, para qualquer  $(x, y) \in D_z$ , tem-se que  $f(x, y) \leq 9$ . Em outra notação:

$$\forall (x, y) \in D_z, f(x, y) \leq f(0,0)$$

**Exemplo 1.2:** Considere o parabolóide definido pela função  $z = 4 + x^2 + y^2$ . Qual deverá ser o máximo absoluto dessa função?

### Solução

Esse parabolóide está representado na Figura 3.3.

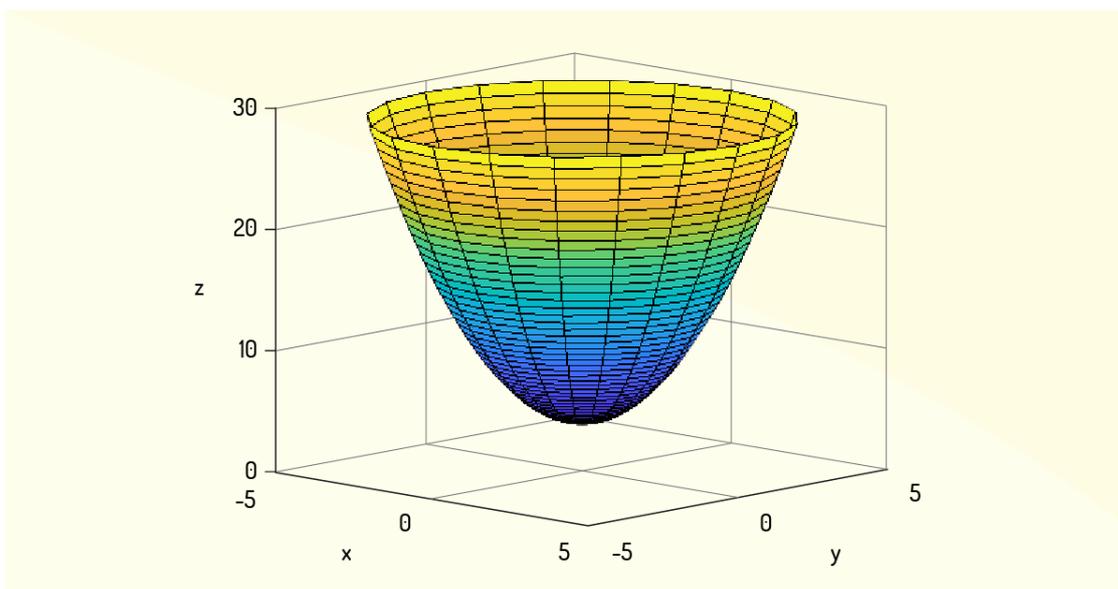


Figura 3.3 - Representação geométrica da função  $z = 4 + x^2 + y^2$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando tal gráfico, fica simples deduzir que o valor máximo absoluto dessa função também irá ocorrer no ponto  $(0,0)$ , para o qual se tem que  $z = 4$ . Isso pode ser comprovado pela Definição 2, pois, para qualquer  $(x, y) \in D_z$ , tem-se que  $f(x, y) \geq 4$ . Em outra notação:

$$\forall (x, y) \in D_z, f(x, y) \geq f(0,0)$$

Além dos máximos e mínimos absolutos, Fleming e Gonçalves (2005) ainda apresentam a definição dos máximos e mínimos locais, da mesma forma que se tem para funções de uma única variável.

**Definição 3 - máximo local ou relativo:** seja uma função  $z = f(x, y)$  qualquer, cujo domínio seja  $D_f$ . Então, o ponto  $(x_0, y_0) \in D_f$  será um ponto de máximo local ou relativo se existir uma bola aberta  $B((x_0, y_0); r) \in D_f$  para a qual se tem que, para qualquer ponto  $(x, y) \in B$ , tem-se que  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ .

**Definição 4 - mínimo local ou relativo:** seja uma função  $z = f(x, y)$  qualquer, cujo domínio seja  $D_f$ . Então, o ponto  $(x_0, y_0) \in D_f$  será um ponto de mínimo local ou relativo se existir uma bola aberta  $B((x_0, y_0); r) \in D_f$  para a qual se tem que, para qualquer ponto  $(x, y) \in B$ , tem-se que  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ .

**Exemplo 1.3:** Considere a função  $z = \text{sen}^2 x + \frac{1}{2}y^2$ . Existem mínimos locais nessa função?

### Solução

A representação gráfica dessa função é mostrada na Figura 3.4.

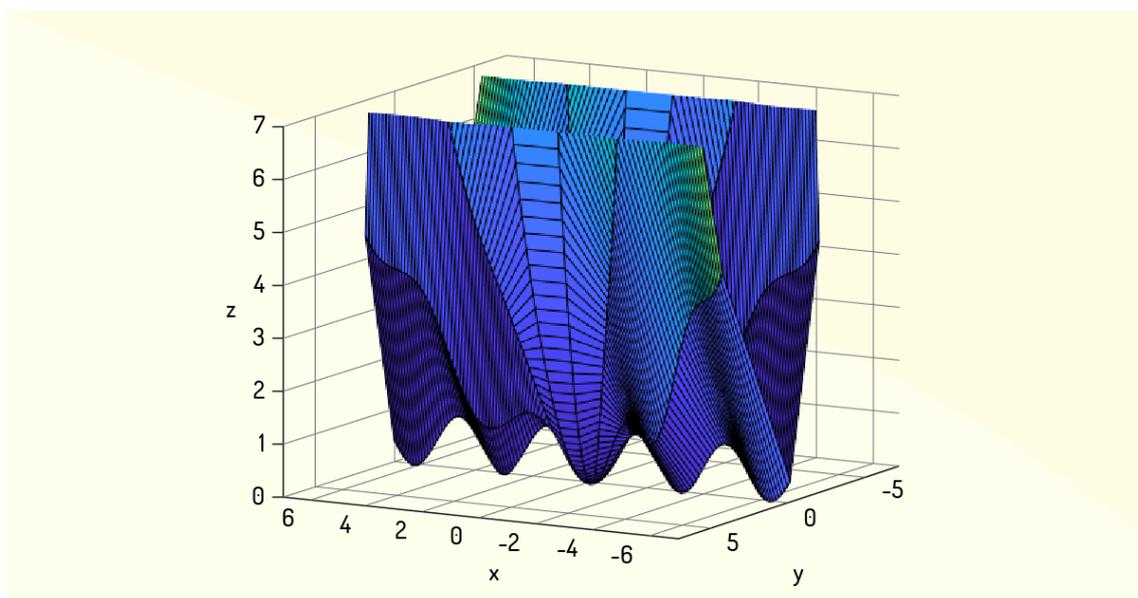


Figura 3.4 - Representação geométrica da função  $z = \text{sen}^2 x + \frac{1}{2}y^2$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como você pode ver na Figura 3.4, a função  $z$  definida tem como valor mínimo  $z = 0$ . Analisando o gráfico, é possível ver que ele apresenta diversos pontos de mínimo local, pois periodicamente se tem que  $z = 0$ .

Verificando, então, essa função, pode-se concluir que os mínimos irão ocorrer quando se tem que  $\sin^2 x = 0$  e  $\frac{1}{2}y^2 = 0$ . Assim, toda vez que se tem  $x = k\pi$ , em que  $k \in Z$  e  $y = 0$ , a função apresentará um mínimo local.

Segundo Flemming e Gonçalves (2005), os pontos de máximo e mínimo também podem ser encontrados na literatura como **pontos extremantes**, tanto no caso dos globais como dos locais. Além disso, você deve imaginar que é possível que exista uma metodologia diferenciada e mais simples para que esses pontos extremantes sejam identificados, fazendo uso de conceitos de cálculo desenvolvidos até aqui. Tal metodologia será discutida na próxima seção.

## REFLITA

Quando se lida com funções de uma única variável, a análise da representação gráfica é uma excelente forma de buscar máximos e mínimos. Você acha que essa prática para a análise de funções de duas variáveis é tão útil e simples quanto no caso de funções de uma única variável?

## ATIVIDADE

- 1) Uma das análises mais corriqueiras que se faz de uma função é identificar a existência dos pontos de máximo e mínimo das funções. Visando desenvolver essa habilidade e praticar os conceitos de máximos e mínimos de uma função, analise as alternativas a seguir e assinale a correta.
  - a) Uma função definida como  $z = a + x^2 + y^2$  tem o ponto  $(0,0)$  como ponto de máximo global.
  - b) Todas as funções com mais de uma variável apresentam um valor de máximo e um valor de mínimo global.
  - c) Para valores de  $x$  entre  $-2$  e  $2$  e para valores de  $y$  entre  $-1$  e  $1$ , a função definida como  $z = a - x^2 - y^2$  tem três pontos como pontos de máximo locais.
  - d) A função  $z = \cos^2 x + y^2$  apresentará mínimos locais sempre que  $y = 0$  e  $x = k\pi$ , em que  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - e) A única forma para se identificar máximos e mínimos locais de uma função com duas variáveis é pela análise gráfica da função.

## PONTOS EXTREMANTES

Assim como mencionado anteriormente, encontrar os pontos extremantes de uma função de duas variáveis dependendo apenas da análise gráfica dessa variável ou da análise da função pode não ser uma prática tão simples, sendo necessário o uso de *softwares* para visualização da representação gráfica da função ou uma extensa e, por vezes, trabalhosa análise matemática. É nesse momento que o cálculo surge para facilitar o trabalho de localizar os pontos: assim como nos casos de análise de funções de uma única variável, podemos fazer uso do ferramental fornecido pelo cálculo para esse tipo de análise.

### Pontos críticos de funções de duas variáveis

Para aplicarmos o cálculo na análise de pontos extremantes de uma função, considere a função de duas variáveis  $z = f(x, y)$ , a qual é definida em um conjunto aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ .

Segundo Flemming e Gonçalves (2005), um ponto  $(x_0, y_0) \in A$  será chamado de **ponto crítico de  $f$**  se as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  forem iguais a zero ou se a função  $f$  não for diferenciável no ponto  $(x_0, y_0) \in A$ . Ou seja, pensando de forma geométrica, os pontos críticos de uma função são aqueles pontos em que o gráfico não apresenta um plano tangente ou, quando apresentar esse plano tangente, ele será horizontal.

Flemming e Gonçalves (2005) ainda destacam que os pontos extremantes de  $f$  se encontram entre os pontos críticos de tal função. No entanto, Thomas Júnior (2016) afirma que nem todos os pontos críticos encontrados serão pontos extremantes. Disso, tem-se que um ponto crítico que não é um ponto extremante será denominado **ponto de sela**.

**Exemplo 2.1:** Verifique se o ponto  $(0,0)$  é um ponto crítico de alguma das seguintes funções:

a.  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

b.  $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + 2y^3}$

## Solução

Para identificar se um dado ponto é um ponto crítico de uma função com duas variáveis, devemos verificar se as derivadas parciais em tal ponto são iguais a zero ou se a função não é diferenciável no ponto indicado. Então:

- a. Para  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ , tem-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 4x = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2y = 0$$

Então, como ambas derivadas parciais no ponto  $(0,0)$  são iguais a zero, tem-se que o ponto  $(0,0)$  é um ponto crítico para essa função. A Figura 3.5 ilustra o gráfico dessa função e o plano tangente ao ponto  $(0,0)$ .

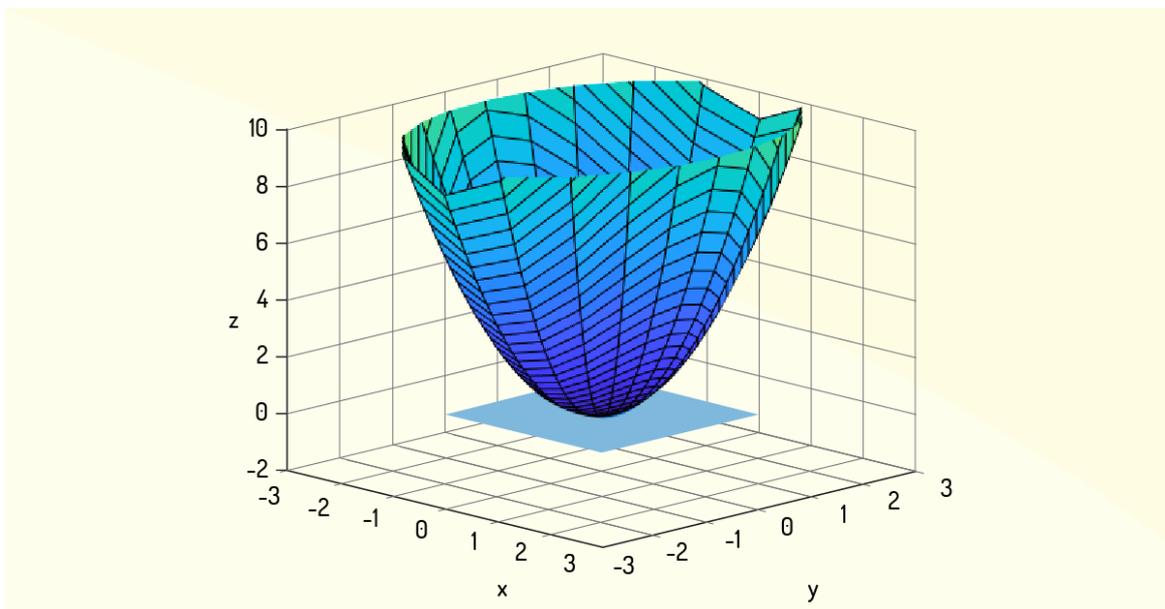


Figura 3.5 - Representação geométrica da função  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$  e do plano tangente ao ponto  $(0,0)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

b. Já para a função  $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + 2y^3}$ , tem-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x\sqrt{3x^2+2y^3}}{3x^2+2y^3} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2\sqrt{3x^2+2y^3}}{3x^2+2y^3}$$

Note que as derivadas parciais no ponto  $(0,0)$  não existem. Então, em tal ponto, a função não apresenta plano tangente. Na Figura 3.6 é mostrada uma representação gráfica dessa função. Note que no ponto  $(0,0)$  existe um “bico”, o que indica que não existe derivada em tal ponto.

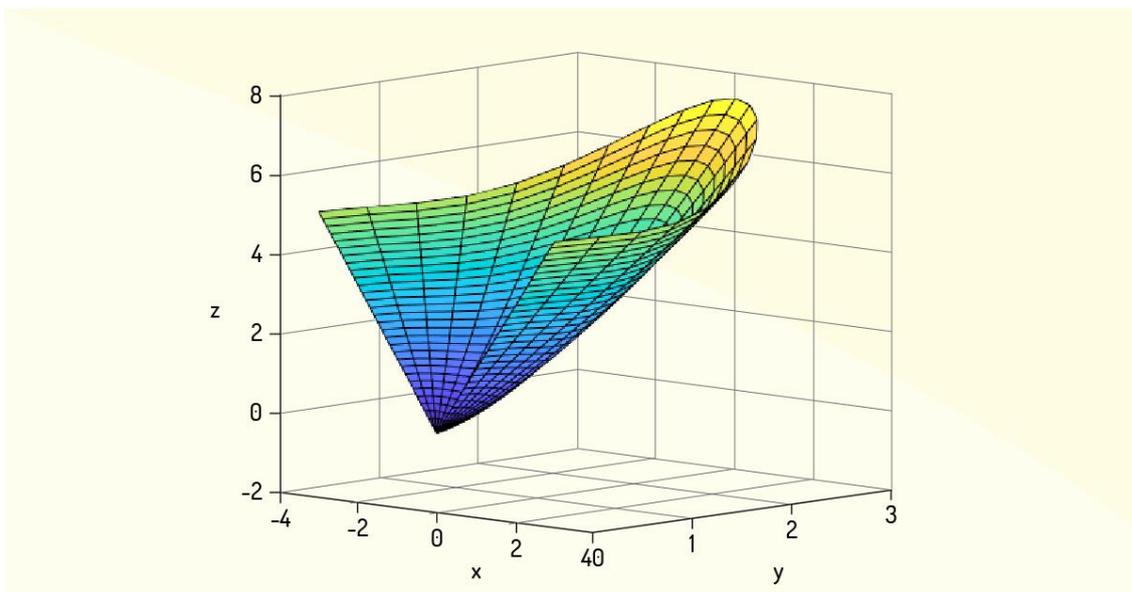


Figura 3.6 - Representação geométrica da função  $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + 2y^3}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir veremos a condição requisitada para a existência de pontos extremantes. Vamos lá?!

### **Condição requisitada para a existência de pontos extremantes**

Seja a função de duas variáveis  $z = f(x, y)$  diferenciável em um conjunto aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Para garantir que um ponto  $(x_0, y_0) \in A$  é um ponto extremante, quer de máximo ou

mínimo local, então  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ . Ou seja, o ponto  $(x_0, y_0)$  deve ser um ponto crítico de  $f$ , segundo Flemming e Gonçalves (2005).

A prova disso pode ser feita de maneira relativamente simples, de acordo com Flemming e Gonçalves (2005). Suponha que o ponto  $(x_0, y_0) \in A$  é um ponto de máximo local da função  $f$ . Então, deve existir uma bola aberta  $B = B((x_0, y_0), r)$  na qual, para todos os pontos  $(x, y) \in B$ , tem-se que  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ .

Considere, agora, a função de uma variável  $h$ , definida como  $h: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $h(x) = f(x, y_0)$  e  $I$  é um intervalo aberto que contém o valor  $x_0$ , tal que se tem  $(x, y_0) \in B$  para todo  $x \in I$ . Isso pode ser visualizado na Figura 3.7 a seguir.

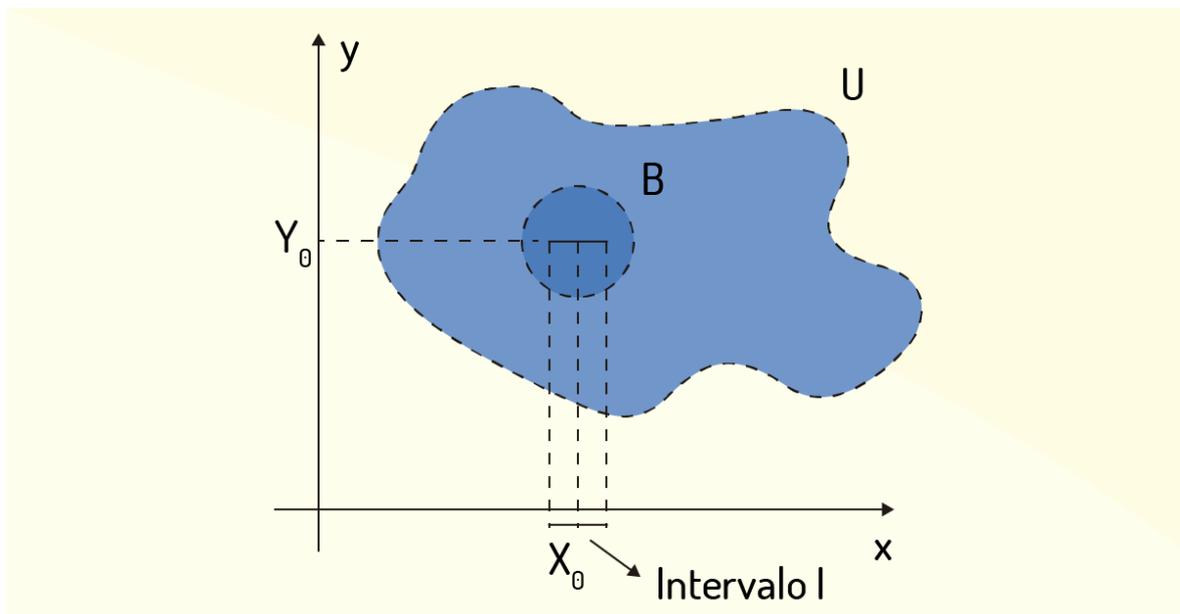


Figura 3.7 - Representação do intervalo  $I$  e da bola aberta  $B$

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 165).

Tem-se, então, que  $h(x)$  é derivável no ponto  $x_0$ , tal que  $h'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ . Além disso,  $x_0$  é um ponto interior de  $I$ , assim como também é um ponto de máximo local da

função  $h(x)$ . Com isso, Flemming e Gonçalves (2005) indicam que podemos encontrar diversos pontos que sejam candidatos a pontos extremantes.

**Exemplo 2.2:** Encontre os pontos críticos da função  $f(x, y) = 2x^2y + 3x^2 - 2y$ .

### Solução

A função  $f(x, y)$  é polinomial, o que acarreta na existência de derivadas parciais para todos os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Basta, então, que avaliemos as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  dessa função e identificar em quais pontos as duas derivadas serão simultaneamente iguais a zero. Avaliando as derivadas parciais da função  $f$  dada, tem-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 2$$

Agora, deve-se resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4xy + 6x = 0 \\ 2x^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema, tem-se que  $x^2 = 1$ , ou seja,  $x = \pm 1$ . Agora, para a primeira equação, convém evidenciar o termo  $x$ , ou seja, a derivada  $\frac{\partial f}{\partial x}$  pode ser reescrita como  $4xy + 6x = 2x(2y + 3)$ . Então, é preciso identificar onde  $2x(2y + 3) = 0$ . Da análise de  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , já sabemos que  $x = \pm 1$ , logo, é preciso que  $2y + 3$  seja igual a 0. Então, encontra-se que  $y = -3/2$ .

Com isso, podemos inferir que a função dada apresentará dois pontos críticos, que serão os pontos  $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$  e  $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ .

**Exemplo 2.3:** Encontre os pontos críticos da função  $f(x, y) = 2x^2y + 2y^2 - 8y$ .

### Solução

Novamente, a função  $f(x, y)$  é polinomial, o que acarreta na existência de derivadas parciais para todos os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Basta avaliar as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  dessa função e identificar em quais pontos as duas derivadas serão simultaneamente iguais a zero. Tem-se, então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4y - 8$$

Agora, deve-se resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4xy = 0 \\ 2x^2 + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

De  $4xy = 0$ , tem-se que  $x = 0$  ou  $y = 0$ . Deve-se partir disso para analisar a outra equação. Assim, se  $x = 0$ , de  $2x^2 + 4y - 8 = 0$ , tem-se que  $4y - 8 = 0$ , ou seja, se  $x = 0$ , então  $y = 2$ . Logo, o ponto  $(0, 2)$  é um ponto crítico da função dada. Agora, se  $y = 0$ , de  $2x^2 + 4y - 8 = 0$ , tem-se que  $2x^2 - 8 = 0$ , ou seja, se  $y = 0$ , então  $x = \pm 2$ . Disso, tem-se que os pontos  $(2, 0)$  e  $(-2, 0)$  também serão pontos críticos de  $f$ . Então, mostrou-se que a função dada apresentará três pontos críticos.

**Exemplo 2.4:** Mostre que os pontos da reta  $y = x - k\pi$ , em que  $k \in \mathbb{Z}$ , são pontos críticos da função  $f(x, y) = 2\cos(x - y)$ .

### Solução

Avaliando as derivadas parciais da função  $f$  dada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\operatorname{sen}(x - y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\operatorname{sen}(x - y)$$

Agora, deve-se resolver o sistema:

$$\begin{cases} -2\text{sen}(x - y) = 0 \\ 2\text{sen}(x - y) = 0 \end{cases}$$

Antes de buscar a resolução direta do sistema dado acima, perceba que tal sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \text{sen}(x - y) = 0 \\ \text{sen}(x - y) = 0 \end{cases}$$

Ou seja, basta avaliar onde  $\text{sen}(x - y) = 0$  para identificar os pontos críticos. Lembrando-se da função seno, sabe-se que ela será igual a zero de forma periódica da seguinte forma:  $\text{sen}(k\pi) = 0$ , em que  $k$  é um número inteiro, ou seja,  $k \in \mathbb{Z}$ . Logo, da equação que se tem, é preciso que:

$$x - y = k\pi \rightarrow y = x - k\pi$$

Note que essa equação é uma equação de reta. Portanto, qualquer ponto  $(x, x - k\pi)$  será um ponto crítico da função  $f$  dada.

### **Interpretação geométrica dos pontos críticos de uma função**

Como visto anteriormente, um ponto crítico de uma função pode ser visto geometricamente como aqueles pontos nos quais não se encontra um plano tangente ou o plano tangente é horizontal. Com isso, pode-se identificar, segundo Flemming e Gonçalves (2005), qual parabolóide mais se aproxima do gráfico da função nas proximidades de um ponto crítico  $(x_0, y_0)$ .

Na Figura 3.8 a seguir, é apresentado o gráfico de uma função  $z = f(x, y)$  hipotética e o plano horizontal tangente em um de seus pontos críticos. Nessa mesma figura pode-se ver que existe um parabolóide que aproxima de forma adequada a região gráfica da função  $z$ .

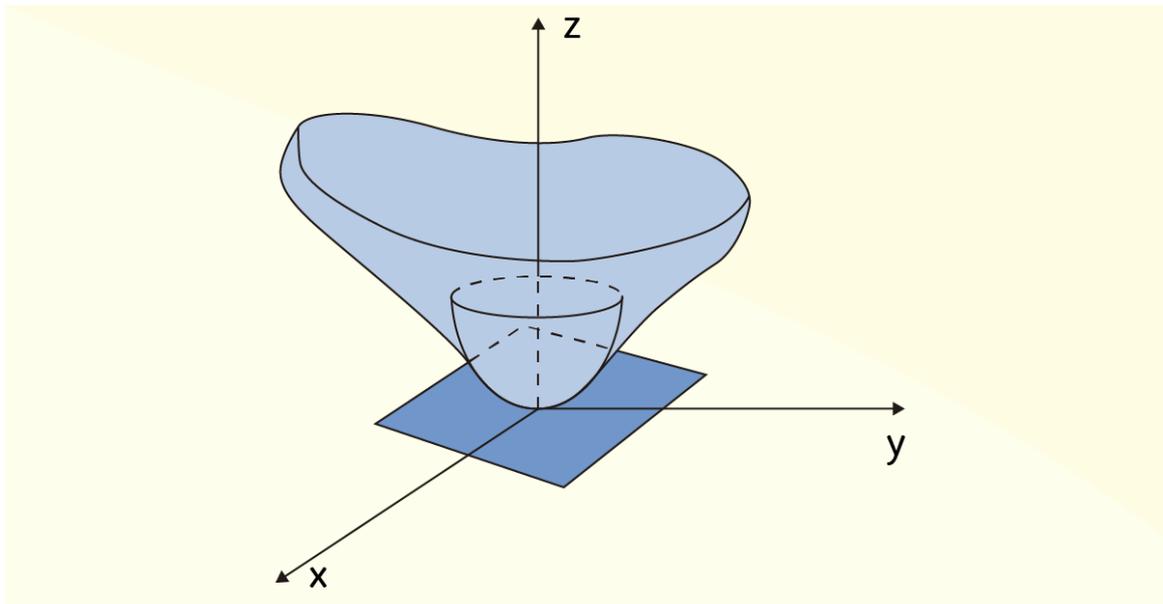


Figura 3.8 - Representação gráfica de uma função  $z = f(x, y)$  e um parabolóide que aproxima-se da região do ponto crítico com concavidade para cima

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 167).

Veja que o parabolóide na Figura 3.8 apresenta concavidade voltada para cima. Isso, segundo Flemming e Gonçalves (2005), é um indicativo de que o ponto crítico em questão é um ponto de mínimo. Na Figura 3.9 a seguir, é apresentado um caso semelhante ao que acabamos de descrever, mas o parabolóide encontrado tem concavidade voltada para baixo, o que indica que o ponto crítico em questão é um ponto de máximo.

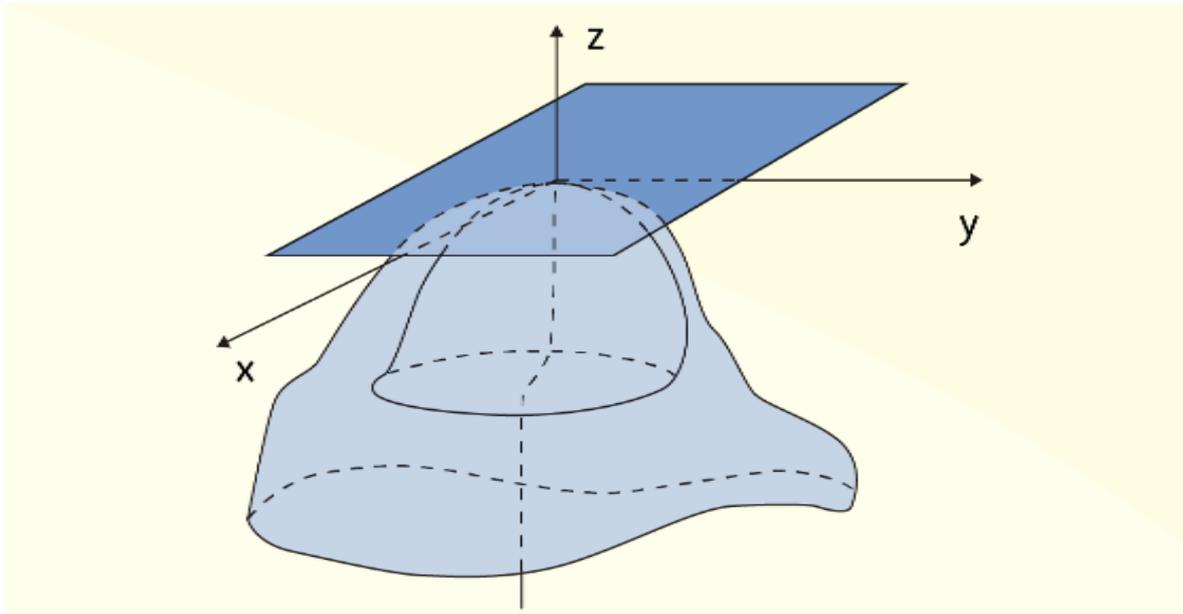


Figura 3.9 - Representação gráfica de uma função  $z = f(x, y)$  e um parabolóide que aproxima-se da região do ponto crítico com concavidade para baixo

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 167).

De acordo com Flemming e Gonçalves (2005), essa noção geométrica apresentará uma condição suficiente para identificar se um ponto crítico é um ponto extremante local. Para isso, considere que a função  $z = f(x, y)$  apresenta derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas em um conjunto aberto  $A$ , o qual contém o ponto  $(x_0, y_0)$  – ponto crítico de  $f$ . Então, considere o determinante  $H(x, y)$ , definido a seguir:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \end{vmatrix}$$

Da análise desse determinante, pode-se chegar a quatro conclusões:

- i. se  $H(x_0, y_0) > 0$  e  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0) > 0$ , então o ponto  $(x_0, y_0)$  é um **ponto de mínimo local** de  $f$ ;

- ii. se  $H(x_0, y_0) > 0$  e  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0) < 0$ , então o ponto  $(x_0, y_0)$  é um **ponto de máximo local** de  $f$ ;
- iii. se  $H(x_0, y_0) < 0$ , então o ponto  $(x_0, y_0)$  não é um extremante local, ou seja,  $(x_0, y_0)$  é um **ponto de sela**;
- iv. se  $H(x_0, y_0) = 0$ , então não se pode afirmar nada.

Flemming e Gonçalves (2005) ainda destacam que a matriz que origina o determinante acima é comum no cálculo, recebendo um nome específico para a designar: **matriz hessiana**. A seguir tem-se a matriz hessiana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \end{bmatrix}$$

Dito isso, o determinante mostrado acima é chamado hessiano da função  $z$ .

A prova do que foi proposto aqui é consideravelmente complexa, mas a ideia fundamental reside no uso de derivadas parciais de segunda ordem da função em questão para determinar qual é o tipo de parabolóide que mais se aproxima da região do ponto crítico. Esse parabolóide pode ser representado de forma genérica como:

$$P(x, y) = \frac{1}{2} Ax^2 + Bxy + \frac{1}{2} Cy^2 + Dx + Ey + G$$

Para essa forma genérica, tem-se que um parabolóide que satisfaça às seguintes cinco condições

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

apresentará o mesmo plano tangente que o gráfico da função  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$ . Note que as cinco condições apresentadas acima podem ser reescritas como:

$$Ax_0 + By_0 + D = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$Bx_0 + Cy_0 + F = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

Ou seja, os termos  $A$ ,  $B$  e  $C$  do parabolóide devem ser iguais às derivadas parciais de segunda ordem da função  $f$ .

Com essas definições, você também é capaz de determinar as curvas de nível do parabolóide que realiza a aproximação no ponto crítico: basta igualar a equação do parabolóide a uma constante  $k$  qualquer:

$$\frac{1}{2}Ax^2 + Bxy + \frac{1}{2}Cy^2 + Dx + Fy + G = k$$

Essa equação pode representar alguns tipos pré-específicos de curvas, da seguinte forma:

- i. se  $B^2 - AC > 0$ , as curvas de nível serão hipérbolas, fazendo com que o gráfico de  $P(x, y)$  seja um parabolóide hiperbólico. Com isso, tem-se que a função  $f$  apresentará um ponto de sela;
- ii. se  $B^2 - AC < 0$ , as curvas de nível serão elipses. Ainda nesse caso, se  $A > 0$  e  $C > 0$ , o parabolóide será elíptico para cima, o que significa que  $f$  tem um mínimo relativo no ponto  $(x_0, y_0)$ . Agora, se  $A < 0$  e  $C < 0$ , o parabolóide será elíptico para baixo, o que significa que  $f$  tem um máximo relativo no ponto  $(x_0, y_0)$ ;
- iii. se  $B^2 - AC = 0$ , as curvas de nível serão parábolas, fazendo com que o gráfico de  $P(x, y)$  seja um cilindro parabólico, de modo que nada poderá ser concluído.

**Exemplo 2.5:** Classifique os pontos críticos da função  $f(x, y) = 2x^2y + 2y^2 - 8y$ .

### Solução

Os pontos críticos dessa função foram determinados anteriormente, no Exemplo 2.3. Tais pontos críticos são  $(0,2)$ ,  $(2,0)$  e  $(-2,0)$ . Para classificar esses pontos, fazemos uso do hessiano da função. Assim, as seguintes derivadas parciais para tal função são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x$$

Com isso, tem-se o seguinte hessiano:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 4y & 4x \\ 4x & 4 \end{vmatrix}$$

Para o qual se tem, então:

$$H(x, y) = 16y - 16x^2$$

Agora, pode-se fazer a análise:

- I. para o ponto  $(0,2)$ ,  $H(0,2) = 16(2) - 16(0)^2 = 32$ . Ou seja, encontrou-se que  $H(0,2) > 0$ . Para completar a análise desse ponto, precisamos agora checar  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(0,2)$ . Como essa derivada parcial é igual a 8, tem-se

que  $H(0,2) > 0$  e  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,2) > 0$ , então, o ponto  $(0,2)$  é um ponto de mínimo local de  $f$ ;

II. para o ponto  $(2,0)$ ,  $H(2,0) = 16(0) - 16(2)^2 = -64$ . Ou seja, encontrou-se que  $H(2,0) < 0$ . Então, o ponto  $(2,0)$  é um ponto de sela de  $f$ ;

III. para o ponto  $(-2,0)$ ,  $H(-2,0) = 16(0) - 16(-2)^2 = -64$ . Ou seja, novamente encontrou-se que  $H(-2,0) < 0$ . Então, o ponto  $(-2,0)$  também é um ponto de sela de  $f$ .

Finaliza-se, assim, a análise desses pontos. A Figura 3.10 apresenta a função em sua forma gráfica.

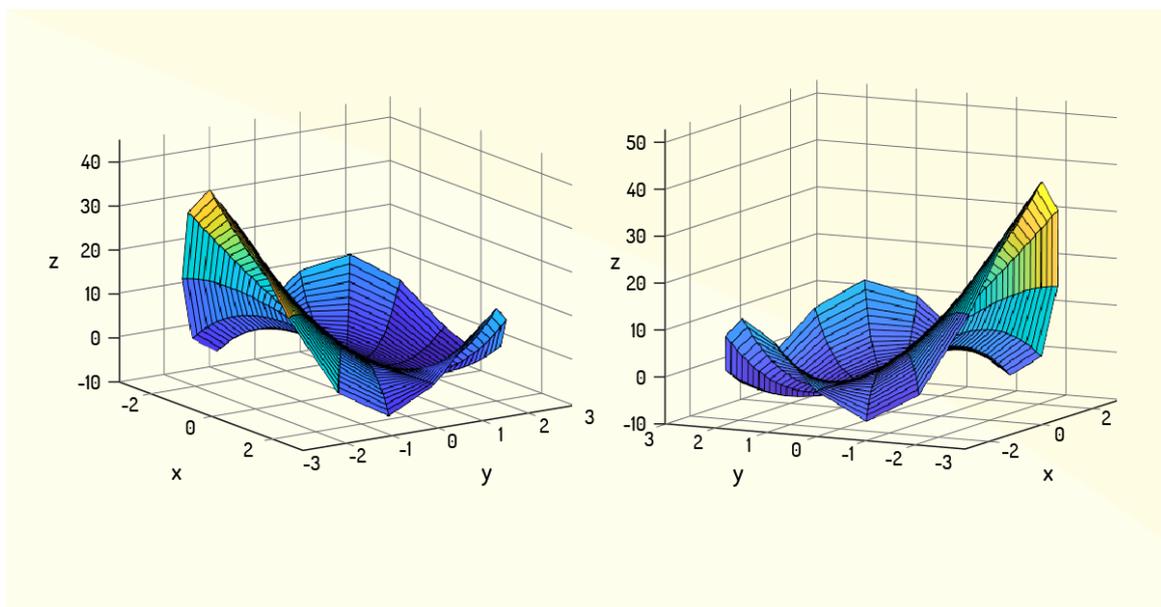


Figura 3.10 - Dois ângulos de visão da função  $z = f(x, y) = 2x^2y + 2y^2 - 8y$

Fonte: Elaborada pelo autor.

**Exemplo 2.6:** Mostre que a função  $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{y} + 4$  tem um mínimo local no ponto (1,1).

### Solução

Inicialmente, deve-se provar que o ponto em questão é um ponto crítico. Para isso, precisa-se avaliar as derivadas parciais de 1ª ordem da função:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y - \frac{5}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x - \frac{3}{y^2}$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4 + 1 - 5 = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 + 1 - 3 = 0$ , então o ponto (1,1) é um ponto crítico dessa função. Agora, devemos avaliar o hessiano. Para tal, é preciso avaliar as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 + \frac{10}{x^3} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{6}{y^3} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

Com isso, tem-se o seguinte hessiano:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 4 + \frac{10}{x^3} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{6}{y^3} \end{vmatrix}$$

Resolvendo esse determinante, você encontra:

$$H(x, y) = \left(4 + \frac{10}{x^3}\right) \left(2 + \frac{6}{y^3}\right) - 1$$

Agora, você deve analisar esse determinante. Para o ponto dado, (1,1), tem-se  $H(1,1) = (4 + 10)(2 + 6) - 1 = 111$ . Ou seja,  $H(1,1) > 0$ . Apenas esse resultado não basta para chegar a alguma conclusão; é preciso checar a derivada parcial de segunda ordem  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  para esse ponto:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,1) = 4 + \frac{10}{1} = 14$$

Como  $H(1,1) > 0$  e  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,1) > 0$ , então o ponto  $(1,1)$  é realmente um ponto de mínimo da função  $f$ .

### ATIVIDADE

2) Os conceitos de derivadas parciais são muito úteis para a verificação de pontos extremantes de funções. Buscando praticar essa aplicação de derivadas, analise a função e as alternativas dadas a seguir, assinalando a correta.

$$f(x, y) = 3x^2 - 2x^3 - 3y^2 + 6xy$$

- a) O ponto  $(0,2)$  é um ponto crítico dessa função  $f$ .
- b) O ponto  $(0,0)$  é um ponto de sela para essa função.
- c) A função  $f$  apresentará quatro pontos críticos:  $(0,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(2,0)$  e  $(2,2)$ .
- d) O ponto  $(0,0)$  é um ponto de mínimo para essa função.
- e) O ponto  $(2,2)$  é um ponto de mínimo para essa função.

## TEOREMA DE WEIERSTRASS

Nos estudos de máximos e mínimos de funções, você irá se deparar com um teorema muito útil e importante: o **Teorema de Weierstrass** ou **Teorema do Valor Extremo**. Segundo Stewart (2017), sendo  $f$  uma função de uma única variável, o Teorema de Weierstrass diz que, sendo essa função  $f$  contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , então essa função  $f$  apresentará um valor de máximo absoluto e um valor de mínimo absoluto.

No entanto, não é exatamente o caso de funções com uma única variável que nos interessa. Então, veremos o caso de funções com duas variáveis, que é nosso objetivo. Considere, então, a função  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $z = f(x, y)$ , a qual é contínua no conjunto fechado e limitado  $A$ . Então, de acordo com Flemming e Gonçalves (2005), existem  $P_1, P_2 \in A$  tais que, para qualquer  $P \in A$ , tem-se  $f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)$ .

A prova desse Teorema de Weierstrass não será feita no presente material. Para encontrar a prova, você pode buscar materiais de análise matemática.

Esse Teorema é de grande importância, principalmente para a resolução de problemas práticos, nos quais é necessário que os pontos extremos estejam localizados na fronteira de um conjunto: tal Teorema garante a existência de um ponto de máximo e de um ponto de mínimo para uma função que seja contínua e com domínio fechado e limitado. Vejamos alguns exemplos que aplicam esse Teorema.

**Exemplo 3.1:** Seja a função  $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y$ . Determine o valor máximo e o valor mínimo dessa função no conjunto  $B$ , delimitado pelo triângulo  $MNP$  da Figura 3.11.

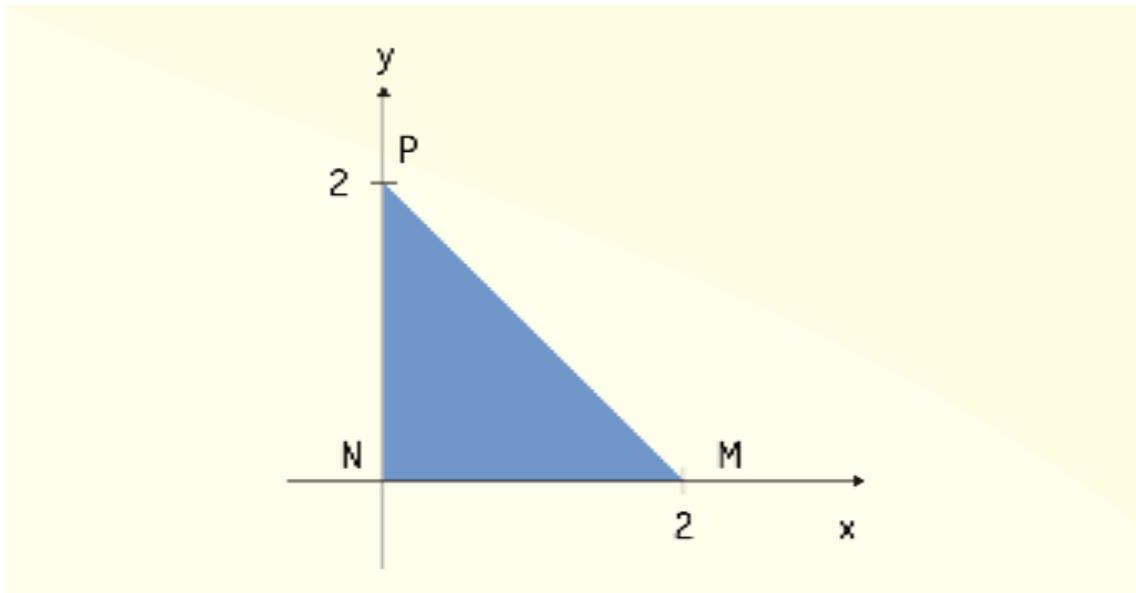


Figura 3.11 - Triângulo MNP

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 174).

### Solução

O Teorema de Weierstrass garante que existem  $P_1, P_2 \in A$  tais que se tem  $f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)$  para qualquer  $P \in A$ . Precisamos, então, analisar todos os pontos de  $B$ , ou seja, devemos buscar  $P_1$  e  $P_2$  que sejam os pontos de máximo e mínimo de  $f$  no conjunto  $B$ .

Façamos uma análise dos pontos pertencentes a  $B$  então. Inicialmente, é útil verificar a existência de pontos críticos dentro desse conjunto. Então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4 = 4(x - 1) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4 = 4(y - 1)$$

Agora, deve-se resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4(x - 1) = 0 \\ 4(y - 1) = 0 \end{cases}$$

Esse sistema é de simples resolução: de forma direta, pode-se encontrar que  $x = y = 1$ .

Então, o único ponto crítico dessa função é  $(1,1)$ , o qual se encontra dentro do conjunto

B. Agora, para identificar qual o tipo de ponto, devemos avaliar o hessiano. Para tal, é preciso avaliar as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

Com isso, tem-se o seguinte hessiano:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Resolvendo esse determinante, você encontra  $H(x, y) = 16$ , ou seja,  $H(1,1) > 0$ . Como a derivada parcial de segunda ordem  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 4$ , tem-se  $H(1,1) > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) > 0$ , acarretando que o ponto  $(1,1)$  é um ponto de mínimo local da função  $f$ .

Agora precisamos analisar a região fronteira de  $B$ . Para tal, convém separar triângulo em três segmentos: MN, NP e PM. Assim:

- I. o segmento PM é definido pela equação  $y + x = 2$  ou  $y = 2 - x$ . Analisando, então, os valores de  $f$  contidos nesse segmento, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x, 2 - x) &= 2x^2 + 2(2 - x)^2 - 4x - 4(2 - x) \\ &= 2x^2 + 2x^2 - 8x + 8 - 4x - 8 + 4x = 4x^2 - 8x \end{aligned}$$

Agora, é preciso realizar a análise de máximos e mínimos de funções de uma única variável para  $g(x) = 4x^2 - 8x$ . Sendo  $g'(x) = 8x - 8$ , o ponto  $x = 1$  é um ponto crítico de  $g$ . Note que  $g(1) = -4$ . Como essa função está limitada para  $x = 0$  e  $x = 2$ , em que tem-se  $g(0) = 0$  e  $g(2) = 0$ , então,  $x = 1$  é um ponto de mínimo em  $[0,2]$  e  $x = 0$  e  $x = 2$  são pontos de máximo em  $[0,2]$ ;

- II. o segmento MN é definido por apresentar  $y = 0$ . Analisando, então, os valores de  $f$  contidos nesse segmento, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 2x^2 + 2(0)^2 - 4x - 4(0) \\ &= 2x^2 - 4x \end{aligned}$$

Analogamente ao que foi feito para o segmento PM, é preciso realizar a análise de máximos e mínimos para  $h(x) = 2x^2 - 4x$ . Novamente, o ponto  $x = 1$  é um ponto crítico, para o qual se tem  $h(1) = -2$ . Como essa função está limitada para  $x = 0$  e  $x = 2$ , em que tem-se  $h(0) = h(2) = 0$ , então,  $x = 1$  é um ponto de mínimo em  $[0,2]$  e  $x = 0$  e  $x = 2$  são pontos de máximo em  $[0,2]$ ;

- III. o segmento NP é definido por apresentar  $x = 0$ . Analisando, então, os valores de  $f$  contidos nesse segmento, tem-se:

$$\begin{aligned} f(0, y) &= 2(0)^2 + 2y^2 - 4(0) - 4y \\ &= 2y^2 - 4y \end{aligned}$$

Analogamente ao que foi feito para o segmento PM, é preciso realizar a análise de máximos e mínimos para  $i(y) = 2y^2 - 4y$ . O ponto  $y = 1$  é um ponto crítico, para o qual se tem  $i(1) = -2$ . Como essa função está limitada para  $y = 0$  e  $y = 2$ , em que tem-se  $i(0) = i(2) = 0$ , então,  $y = 1$  é um ponto de mínimo em  $[0,2]$  e  $y = 0$  e  $y = 2$  são pontos de máximo em  $[0,2]$ .

Pode-se, então, compilar todos os resultados obtidos dessa análise em uma tabela:

Ponto	Localização	Imagem do ponto
(0,0)	Fronteira de $B$	0
(0,1)	Fronteira de $B$	-2
(0,2)	Fronteira de $B$	0
(1,1)	Fronteira de $B$	-4
(1,0)	Fronteira de $B$	-2
(2,0)	Fronteira de $B$	0

Tabela 3.1 - Dados da análise da função em  $B$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, nota-se que o máximo dessa função  $f(x, y)$  em  $B$  será 0 e o mínimo será -4.

## FIQUE POR DENTRO

Um dos grandes focos que se tem para a aplicação de análise de máximos e mínimos de funções reside na otimização de processos. Em teoria, todo processo ou fenômeno pode ser traduzido em linguagem matemática na forma de uma função conhecida como modelo, via uma técnica conhecida como modelagem. Por exemplo, uma fábrica de produtos químicos cujos processos estejam bem modelados é capaz de identificar e melhorar pontos do processo, via análise matemática do modelo. Logo, a análise de máximos e mínimos de funções, principalmente em conjuntos fechados, é extremamente importante, sendo o profissional que domina essa habilidade mais requisitado pelo mercado atualmente.

Saiba mais acessando o *link*: <<https://novidia.com.br/blog/otimizacao-de-processos-industriais/>>. Acesso em: 29 abr. 2019.

### ATIVIDADE

- 3) O Teorema de Weierstrass é muito útil para a análise de máximos e mínimos de funções, até porque diversos casos práticos exigem a análise de uma função em um conjunto fechado. Visando fixar os conceitos e a aplicação desse teorema e considerando a função e o conjunto retangular  $D$  dados, analise as alternativas a seguir e assinale a correta.

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + 8y \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$$

- a) A função dada não apresentará nenhum ponto extremante no conjunto delimitado.
- b) O máximo de  $f$  em  $D$  ocorre no ponto  $(0, 2)$ , em que se tem  $f(0, 2) = 16$ .
- c) Essa função apresenta um ponto crítico, mas este se encontra fora de  $D$ .
- d) O máximo de  $f$  na fronteira de  $D$  ocorrerá no ponto  $(3, 2)$ .
- e) O mínimo de  $f$  na fronteira de  $D$  ocorrerá no ponto  $(2, 2)$ .

## APLICAÇÃO DOS MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO

Maximizar ou minimizar funções é um tipo de atividade corriqueira em várias áreas, fazendo com que aplicações dos conceitos abordados nesta unidade sejam amplamente empregados em diversas áreas da ciência. Problemas geométricos, físicos, químicos, industriais, econômicos e de planejamento são apenas alguns exemplos simples de uso da maximização e minimização de funções. Logo, nesta seção faremos uma breve introdução às aplicações práticas do que foi discutido até o momento.

### Máximos e mínimos condicionados

De forma geral, quando se deseja avaliar o máximo de uma função  $f$ , a operação pode ser representada como  $\max f$ . De forma análoga, quando se deseja buscar o mínimo de uma função  $f$ , representa-se por  $\min f$ . A busca desses máximos e mínimos de uma função é um processo conhecido como **otimização de funções**, no qual a função sendo maximizada ou minimizada é chamada **função objetivo**. Essa abordagem de análise de funções leva a uma **otimização irrestrita**, para a qual basta aplicar as metodologias vistas até o momento, sendo este resultado conhecido como **máximo ou mínimo livre** (FLEMMING; GONÇALVES, 2005).

No entanto Fleming e Gonçalves (2005) destacam que esse procedimento de otimização irrestrita não é algo muito comum na prática. Você irá notar que casos reais de otimização apresentarão algum tipo de restrição, ou seja, nem todos os máximos e mínimos encontrados para uma função que represente algo real são praticáveis.

Por exemplo, considere que você trabalhe em uma empresa e deseja prever qual será o máximo lucro que ela pode obter com a venda de dois produtos diferentes. Sendo  $x$  e  $y$  a quantidade de vendas desses produtos, você pode propor uma função lucro na forma  $L(x, y)$ , de modo que seu problema se reduz a avaliar  $\max L$ . No entanto, você sabe que a quantidade de vendas está fadada a ser algo maior ou igual a zero, ou seja, ou você vende alguma quantidade, ou você não vende nada. Logo, você deverá buscar  $\max L$ , sujeito à condição de  $x, y \geq 0$ .

Quando se tem alguma condição restritiva ou algum vínculo para a otimização de uma função, Flemming e Gonçalves (2005) dizem que se tem um problema de **otimização restrita**. Simbolicamente, as restrições ou vínculos de uma otimização restrita são indicadas pelo símbolo *s.a.*. Assim, voltando ao exemplo dado acima sobre a maximização do lucro, você pode representar como  $\max L, s.a. x, y \geq 0$ . Essa abordagem de otimização restrita leva a um ponto de **máximo ou mínimo condicionado**. Na Figura 3.12 tem-se a exemplificação gráfica da um máximo condicionado do problema de otimização  $\max f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, s.a. x + y = 2$ .

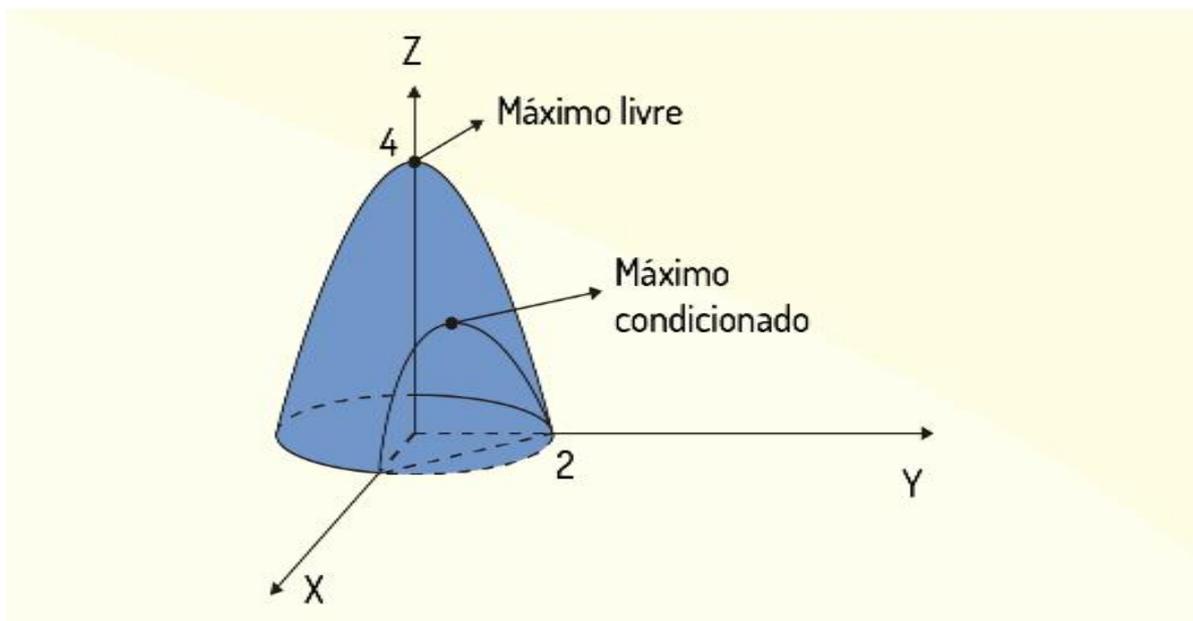


Figura 3.12 - Diferença entre o máximo livre e o máximo condicionado de uma função

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 182).

**Exemplo 4.1:** Considere a caixa apresentada na Figura 3.13. Quais dimensões deve apresentar essa caixa retangular sem a tampa para que seu volume seja  $32 \text{ m}^3$  e sua área superficial seja a menor possível?

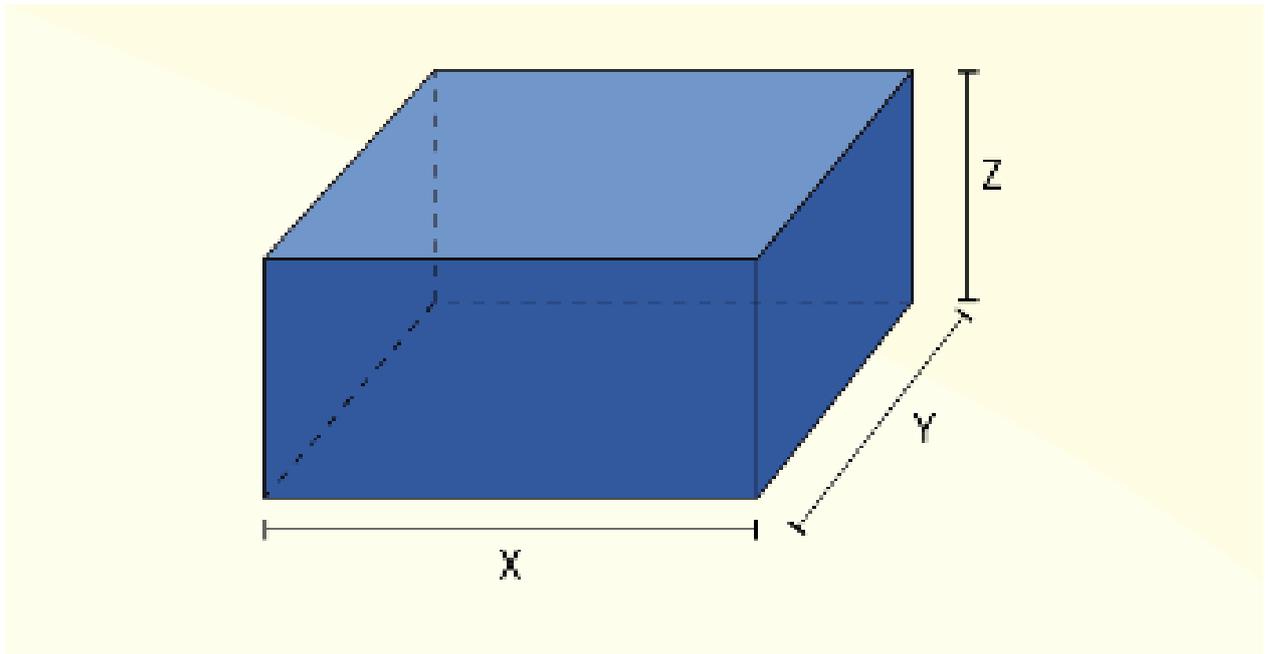


Figura 3.13 - Caixa retangular

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 175).

### Solução

Da geometria básica, sabe-se que o volume dessa caixa pode ser calculado como  $V = xyz$  e sua área de superfície será  $S = 2xz + 2yz + xy$ . Logo, esse problema consiste em minimizar a função  $S$ , sabendo que  $xyz = 32$  e que  $x$ ,  $y$  e  $z$  devem ser não nulos. Simbolicamente:

$$\min S = 2xz + 2yz + xy, \text{ s. a. } xyz = 32 \text{ e } x, y, z > 0$$

Usando a restrição dada para o volume, pode-se isolar a variável  $z$ , fazendo com que  $S$  seja representada como uma função de duas variáveis:

$$z = \frac{32}{xy} \rightarrow S = 2x \frac{32}{xy} + 2y \frac{32}{xy} + xy = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy$$

Com essa restrição modificada, nosso problema se reduz agora a:

$$\min S = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + xy, \text{ s. a. } x, y, z > 0$$

Agora, basta encontrar o ponto de mínimo para a função. Assim:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{64}{x^2} + y \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{64}{y^2} + x$$

Resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\frac{64}{x^2} + y = 0 \\ -\frac{64}{y^2} + x = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação, encontra-se que  $y = \frac{64}{x^2}$ . Assim, reescrevendo a segunda equação, você encontrará:

$$x - \frac{64}{\left(\frac{64}{x^2}\right)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{64x - x^4}{64} = 0$$

$$x(64 - x^3) = 0$$

Tem-se, então, que  $x = 0$  ou  $x = 4$ . Devido à restrição, o único desses valores de  $x$  que pode ser usado é  $x = 4$ . Então, tem-se que  $y = 4$ . Logo, o ponto  $(4,4)$  é um ponto crítico que pode ser utilizado. Para verificar se esse ponto é realmente um ponto de mínimo, avalia-se o hessiano.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{128}{x^3} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,4) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{128}{y^3} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,4) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

$$H(4,4) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Como  $H(4,4) > 0$  e  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(4,4) > 0$ , o ponto  $(4,4)$  é realmente um ponto de mínimo local da função  $S$ . Então, as dimensões que a caixa deve apresentar para satisfazer às condições determinadas são:

$$x = 4 \text{ m} \quad y = 4 \text{ m} \quad z = \frac{32}{xy} = \frac{32}{4 \cdot 4} = 2 \text{ m}$$

### Método dos multiplicadores de Lagrange

Infelizmente, nem todos os problemas de máximos e mínimos condicionados são tão simples de serem resolvidos quanto o mostrado no Exemplo 4.1. Um método que permite a resolução desse tipo de problema de forma mais geral é o **método dos multiplicadores de Lagrange**. Ao aplicar esse método em um problema de otimização restrita que apresente  $n$  variáveis e  $m$  restrições de igualdade, o problema pode ser resolvido como um caso de otimização irrestrita de  $n + m$  variáveis (FLEMMING; GONÇALVES, 2005).

Por exemplo, considere o problema  $\max f(x, y), s. a. g(x, y) = 0$ . Das propriedades do vetor gradiente, Fleming e Gonçalves (2005) dizem que é possível ter uma visão gráfica do método dos multiplicadores de Lagrange, permitindo a determinação dos pontos de mínimo e máximo condicionados de  $f$ . Esse método consiste em desenhar o gráfico de  $g(x, y) = 0$  e várias curvas de nível da função objetivo, ou seja,  $f(x, y) = k$ , observando seu comportamento crescente da constante  $k$ . Então, o valor máximo de  $f(x, y)$  irá coincidir com a maior constante  $k$  tal que a curva de nível intercepte a curva de  $g(x, y) = 0$ . Esse evento ocorre em um ponto  $P_0$ , no qual ambas curvas têm a mesma reta tangente  $t$ , como mostra a Figura 3.14.

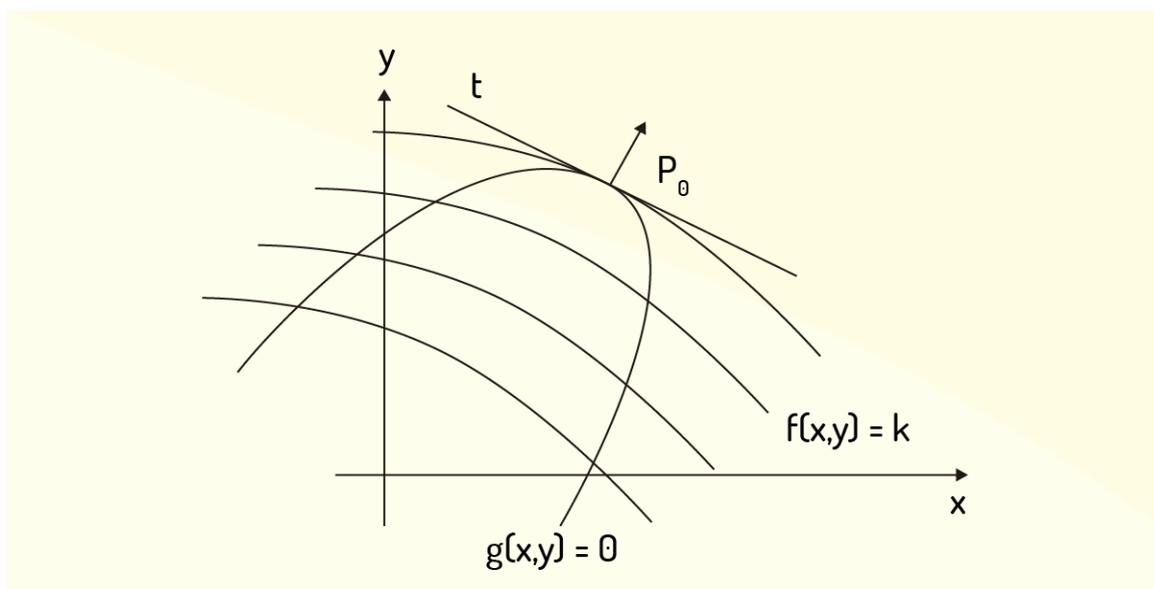


Figura 3.14 - Método dos multiplicadores de Lagrange para  $f(x, y), s. a. g(x, y) = 0$

Fonte: Adaptada de Fleming e Gonçalves (2005, p. 183).

De acordo com Flemming e Gonçalves (2005), essa representação geométrica leva à seguinte proposição: considere a função  $f(x, y)$ , diferenciável em um conjunto aberto  $A$ , e função  $g(x, y)$ , cujas derivadas parciais sejam contínuas em  $A$ , de tal forma que  $\nabla g(x, y) \neq (0,0), \forall (x, y) \in B$ , no qual  $B = \{(x, y) \in A | g(x, y) = 0\}$ . Para que o ponto  $(x_0, y_0) \in B$  seja um ponto extremante local da função  $f$  em  $B$ , uma condição necessária é que, para um  $\lambda$  real:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \quad (1)$$

A demonstração dessa proposição não será feita, pois não condiz com o objetivo desse material. No entanto, dado o que foi proposto no parágrafo acima, Flemming e Gonçalves (2005) dizem que os pontos extremantes condicionados da função  $f$  deverão satisfazer às seguintes equações para um  $\lambda$  real:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad g(x, y) = 0 \quad (2)$$

O número  $\lambda$  real que satisfaça às equações de (2) é chamado *multiplicador de Lagrange*. Logo, esse método consiste basicamente em encontrar a seguinte função de três variáveis:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (3)$$

enquanto se observa o fato de que as três equações de (2) simplesmente equivalem a  $\nabla L = 0$ , ou simplesmente

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (4)$$

Flemming e Gonçalves (2005) atentam para o fato de que deve-se tomar cuidado por esse método simplesmente ajudar a identificar os potenciais pontos extremantes da função dadas as restrições. A classificação desses pontos deverá ser feita por outra forma. Vejamos um exemplo que os mesmos autores apresentam sobre o método.

**Exemplo 4.2:** Um galpão retangular deverá ser construído em um terreno de forma triangular, como mostra a Figura 3.15. Encontre a área máxima que esse galpão poderá apresentar.

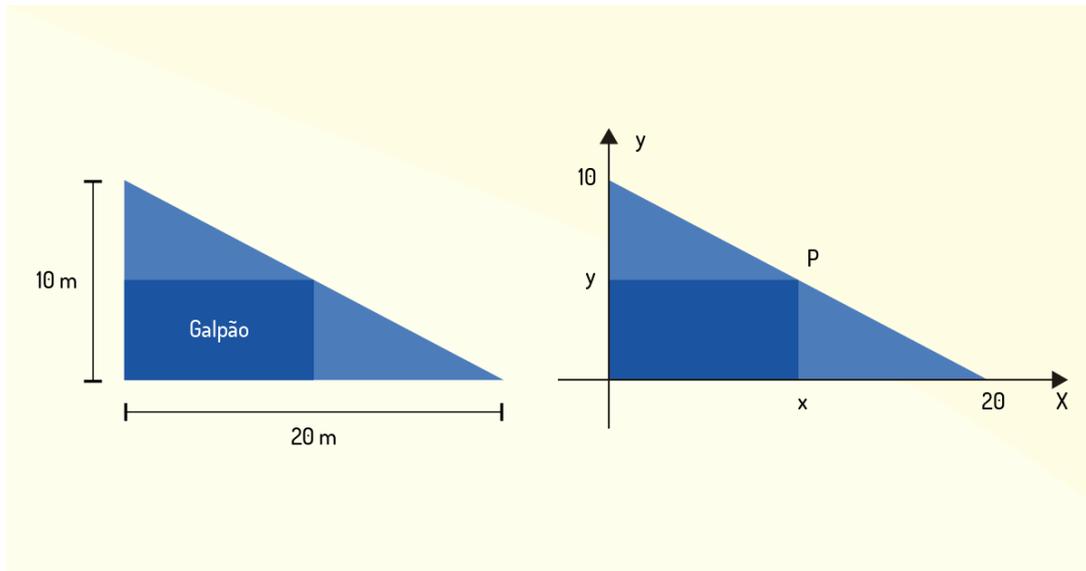


Figura 3.15 - Terreno triangular e galpão a serem construídos e sua representação no plano cartesiano

Fonte: Adaptado de Flemming e Gonçalves (2005, p. 184).

### Solução

A representação cartesiana do terreno facilita a manipulação matemática para a resolução desse problema. Da Figura 3.15, pode-se concluir que a área do galpão será  $A(x, y) = x \cdot y$ , assim como o ponto  $P$ , que é uma das quinas do retângulo, deverá se encontrar sobre a reta  $x + 2y = 20$ . Formulado isso, tem-se o seguinte problema a ser resolvido:

$$\max A = xy, \text{ s. a. } x + y = 20$$

Para aplicar o método do multiplicador de Lagrange, deve-se reescrever a restrição desse problema, igualando-a a zero. Assim, a restrição será  $x + 2y - 20 = 0$ . Logo, a função lagrangeana será:

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x + 2y - 20)$$

Da equação (4), nota-se que é preciso avaliar as derivadas parciais da função lagrangeana.

Então:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x + 2y - 20)$$

Como essas três derivadas devem ser iguais a zero, encontra-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y - \lambda = 0 \\ x - 2\lambda = 0 \\ 20 - x - y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, você deve encontrar que  $x = 10$ ,  $y = 5$  e  $\lambda = 5$ . Note que o valor encontrado para  $\lambda$  simplesmente serve para a resolução da função lagrangeana, não sendo efetivamente importante para a solução final do problema.

Com as dimensões que foram encontradas por esse método, a área do galpão deverá ser  $A = (10 \text{ m}) \cdot (5 \text{ m}) = 50 \text{ m}^2$ . Veja que o método que utilizamos aqui para a resolução do problema não classifica o ponto (10,5) que encontramos. No entanto, você pode verificar de forma relativamente simples, com alguns poucos testes, se necessário, que o valor encontrado é um máximo para essa função.

Existem ainda outras maneiras de avaliar máximos e mínimos condicionados. No entanto, dada a vasta quantidade de técnicas disponíveis para tais procedimentos, existe uma área da ciência que se dedica exclusivamente aos estudos de problemas deste tipo – a área de otimização. Como o foco do presente material reside no estudo do Cálculo, outras técnicas de otimização não serão aqui discutidas.

## ATIVIDADE

- 4) Uma empresa de entregas aceita apenas caixas cuja soma do comprimento mais perímetro não exceda 405 cm, conforme ilustra a figura a seguir. Assinale a alternativa correta.

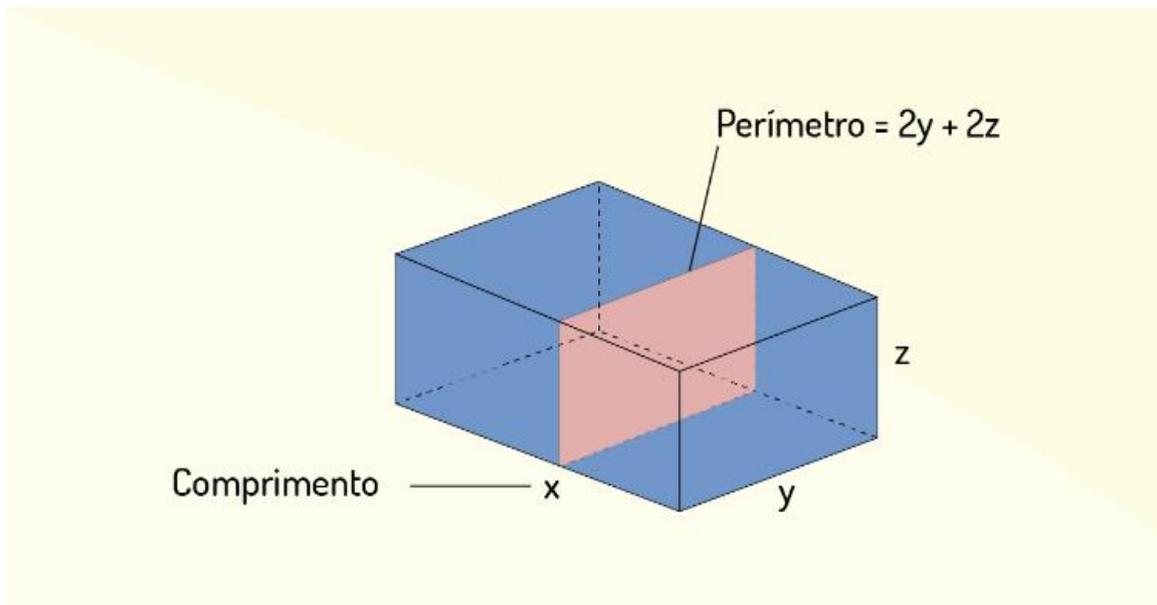


Figura 3.16 - Dimensões da caixa

Fonte: Adaptado de Thomas Júnior (2016, p. 856).

- As dimensões que maximizam o volume dessa caixa são  $x = 105 \text{ cm}$  e  $y = z = 75 \text{ cm}$ .
- O volume máximo de uma caixa que essa transportadora aceita é de aproximadamente 615,1 L.
- O volume máximo de uma caixa que essa transportadora aceita é aproximadamente 307,5 L.
- As que maximizam o volume dessa caixa são  $x = y = z = 81 \text{ cm}$ .  
 Portanto, as dimensões que maximizam o volume da caixa são  $x = 135 \text{ cm}$  e  $y = z = 67,5 \text{ cm}$ .
- O volume máximo de uma caixa que essa transportadora aceita é aproximadamente 531,4 L.

## **INDICAÇÕES DE LEITURA**

Nome do livro: *Cálculo: volume 2*

Editora: Pearson

Autor: James Stewart

ISBN: 9788522125845

Comentário: Um livro de cálculo extremamente didático, com inúmeras figuras que facilitam consideravelmente a compreensão dos tópicos estudados. Apresenta também uma boa quantidade de exemplos e exercícios, facilitando a absorção do conteúdo.

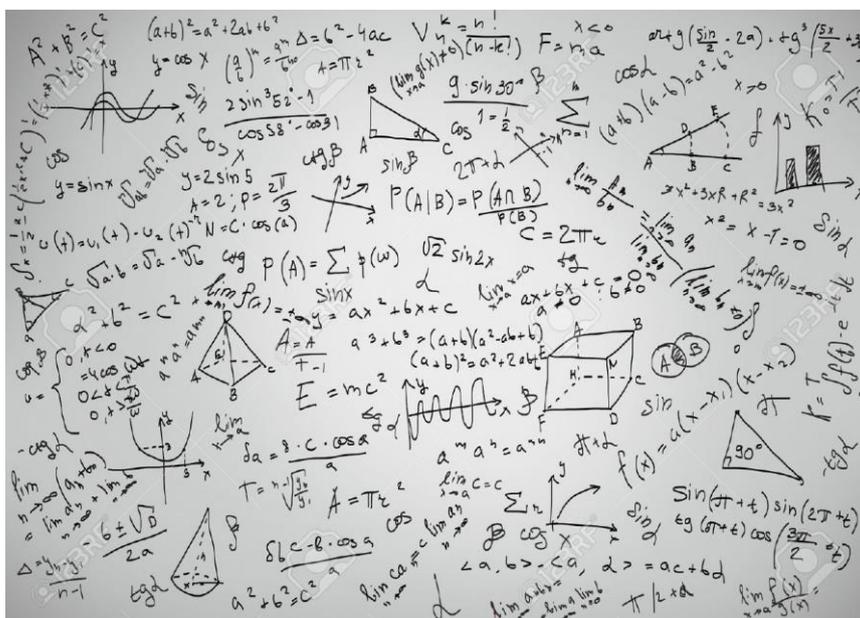
UNIDADE IV

# Integrais múltiplas

*Renam Luis Acorsi*

## Introdução

Finalizando o assunto de Cálculo 2, caro(a) aluno(a), chegou o momento de aprender como lidar com problemas de integrais de funções de mais de uma variável. Você verá que, apesar de aparentar ser uma teoria extremamente complexa, a prática dessas integrais não é muito mais complexa que aquela vista nas integrais de funções de uma única variável. Sendo assim, a presente Unidade se inicia com a descrição do problema das integrais duplas. Será feita uma analogia com o desenvolvimento da integral de funções de única variável, para depois levar o assunto para integrais triplas. Além disso, como as regiões de integração podem ser realmente complexas, as mudanças de variáveis típicas para o assunto também serão apresentadas.



Fonte: Denis Ismagilov / 123RF.

## INTEGRAIS DUPLAS

Agora, é o momento de expandirmos os conceitos de integrais de funções de uma única variável para o caso de funções com duas variáveis. O primeiro conceito a ser trabalhado será o de integral dupla, que pode ser entendido como uma extensão natural das integrais de funções de uma única variável para casos de funções com duas variáveis. É necessário adiantar que este tópico pode apresentar algumas demonstrações de conceitos muito complexas, fugindo do foco deste material, o qual é a compreensão e a aplicação dos conceitos. Assim, caro(a) aluno(a), caso você deseje verificar algumas destas provas eventualmente omitidas, é recomendável buscar livros de Análise Matemática.

### Integrais duplas sobre retângulos

Stewart (2017b) retoma que um dos primeiros métodos apresentados ao se iniciar os estudos de integrais é aquele no qual, para se calcular a área sob a curva, faz-se o uso de diversos retângulos. Um procedimento semelhante também pode ser utilizado para o caso de integrais de funções com duas variáveis.

Para facilitar a compreensão do assunto, o referido teórico sugere que, antes de iniciarmos os nossos estudos de integrais duplas, revisemos rapidamente o conceito de integrais definidas para uma função de uma variável. Seja, então, uma função  $f(x)$  definida no intervalo fechado  $[a, b]$ , para o qual  $a \leq x \leq b$ . Se você substituir esse intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , todos com um mesmo comprimento  $\Delta x = (b - a)/n$ , e escolher pontos de amostragem  $x_i^*$  em cada um desses intervalos, você pode formar a **soma de Riemann**:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x \quad (1)$$

Agora, se você criar infinitos subintervalos, ou seja, tomando-se o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , você tem a integral definida de  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x \quad (2)$$

Assim, no caso especial em que  $f(x) \geq 0$ , Stewart (2017b) indica que a soma de Riemann pode simplesmente ser interpretada como a soma dos infinitos retângulos aproximadores sob a curva, delimitada por valores de  $x$  que vão de  $a$  até  $b$ , como mostra a Figura 4.1.

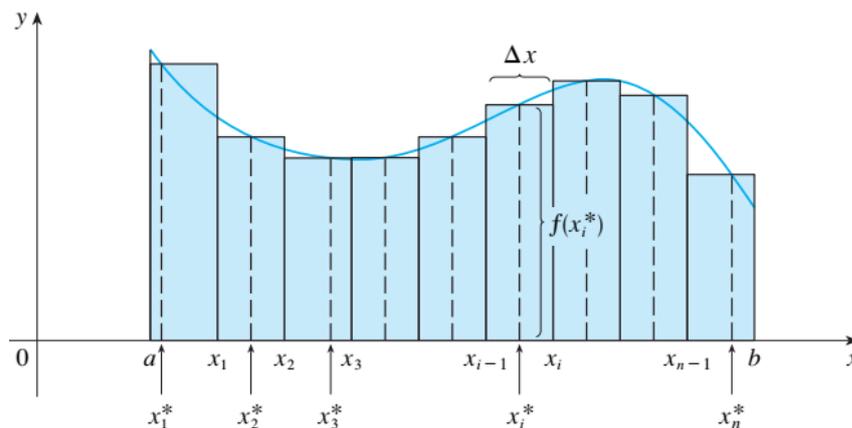


Figura 4.1 - Representação gráfica da soma de Riemann para avaliar uma integral definida

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 874).

Esse mesmo pensamento pode ser expandido para o caso de uma função de duas variáveis, segundo Thomas Jr (2016), visto que retângulos são uma das mais simples construções planares para manipulação matemática. Sendo assim, considere uma função  $z = f(x, y)$ , a qual é definida em uma região retangular  $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ . A fim de simplificar a compreensão, Stewart (2017b) ainda diz para se considerar  $z \geq 0$ , pois, assim, tem-se a formação de um sólido  $S$ , delimitado pela base retangular  $R$  e por  $f(x, y)$ , representado por  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . A Figura 4.2 evidencia a representação gráfica desse sólido  $S$ .

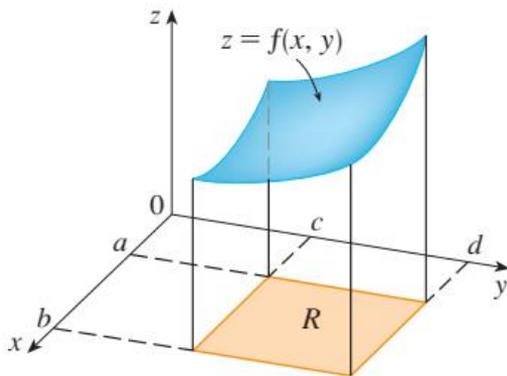


Figura 4.2 - Sólido  $S$  formado por uma base retangular  $R$  e o gráfico de  $z$

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 874).

Portanto, Thomas Jr. (2016) e Stewart (2017b) indicam que o objetivo para se determinar uma integral dupla simplesmente será avaliar o volume desse sólido  $S$ . Entretanto como se pode realizar tal tarefa? Basicamente, da mesma forma descrita anteriormente para a definição de integral definida de uma função de única variável, ainda de acordo com Thomas Jr. (2016) e Stewart (2017b). Logo, a primeira coisa a ser feita é subdividir o retângulo  $R$  em outros retângulos menores, da seguinte forma: o intervalo  $[a, b]$  pode ser dividido em  $m$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , todos com um mesmo comprimento  $\Delta x = (b - a)/m$ , e o intervalo  $[c, d]$  pode ser dividido em  $n$  subintervalos  $[y_{j-1}, y_j]$ , todos com um mesmo comprimento  $\Delta y = (d - c)/n$ . Com isso, o retângulo  $R$  apresentará diversos retângulos menores de área  $\Delta A = \Delta x \Delta y$ , sendo esses retângulos menores representados por

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

A Figura 4.3 representa essa divisão do retângulo  $R$ .

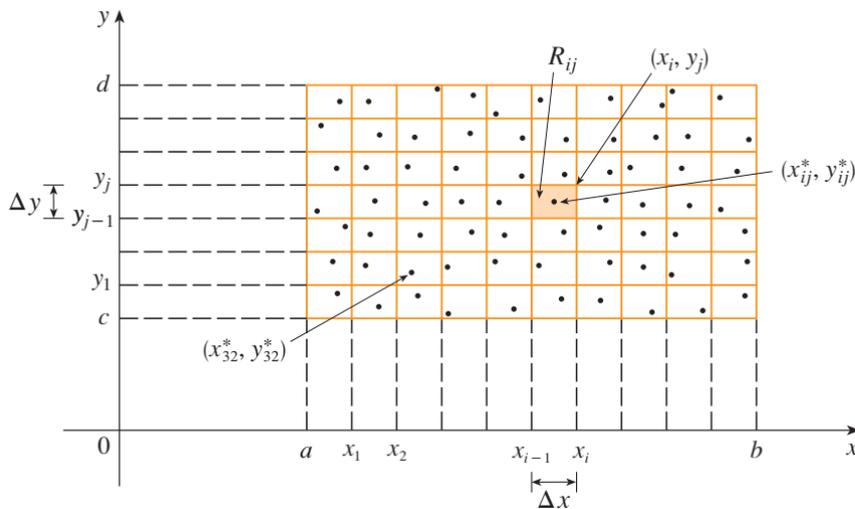


Figura 4.3 - Divisão do retângulo  $R$  em diversos retângulos  $R_{ij}$

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 875).

Mantendo a semelhança do que foi feito no caso da integração de funções de uma única variável, você deve escolher, agora, pontos aleatórios dentro dos retângulos  $R_{ij}$ , sendo esses pontos chamados de **pontos de amostragem**  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ , segundo Stewart (2017b). Na Figura 4.3, os pontos de amostragem estão representados como pequenos pontos dentro de cada retângulo. A escolha desses pontos permitirá que você aproxime a região do sólido  $S$  que se encontra acima de cada retângulos  $R_{ij}$  com um pequeno bloco retangular de base  $\Delta A$  e altura  $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ , ou seja, um pequeno bloco retangular de volume  $V_{ij} = \Delta A \cdot f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ . Logo, ao avaliar os volumes de cada um dos retângulos  $R_{ij}$  obtidos e somar todos esses volumes  $V_{ij}$ , você encontrará uma aproximação para o volume  $V$  de  $S$ , ou seja:

$$V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta A \cdot f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \quad (3)$$

A Figura 4.4 mostra um desses retângulos  $R_{ij}$ , sendo ele comparado à curva de  $f(x, y)$ , assim como também se vê todos os blocos retangulares usados para aproximar o volume de  $S$ .

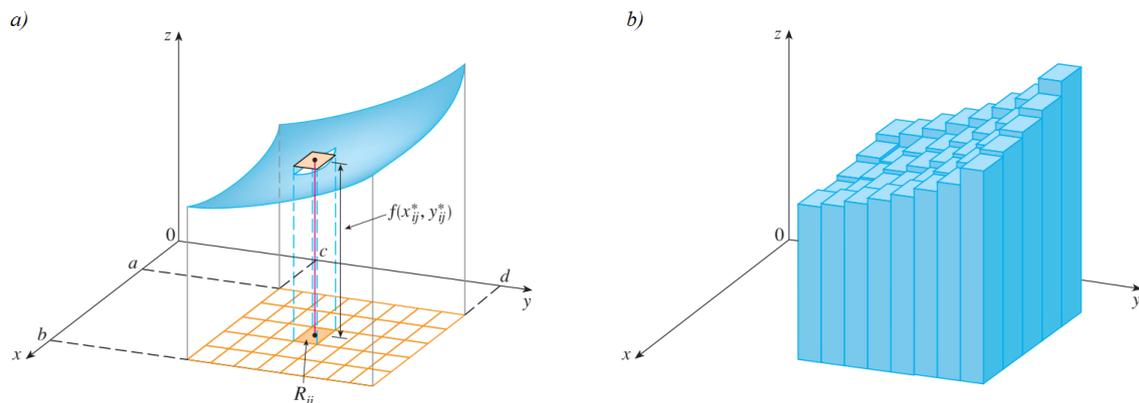


Figura 4.4 - a) Bloco retangular de base  $\Delta A$  e altura  $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  e b) todos os blocos retangulares gerados para estimar o volume do sólido  $S$

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 875).

Como fica evidente pela análise da Figura 4.4 b), apenas alguns blocos retangulares, certamente, não irão gerar uma aproximação tão boa do sólido  $S$ . Uma forma que existe e permite melhorar essa aproximação, segundo Stewart (2017b), é utilizar o máximo de blocos retangulares possíveis, ou seja:

$$V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta A \cdot f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \quad (4)$$

Como esse limite apresentado em (4) é muito recorrente, inclusive para situações em que  $f(x, y)$  não é positiva, assim como quando não se está exatamente calculando o volume de um sólido, convém empregar a seguinte definição:

**Definição 1:** A integral dupla de uma função  $f(x, y)$ , em um espaço retangular  $R$ , é definida como

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (5)$$

Se o limite acima existir.

Flemming e Gonçalves (2005) apresentam algumas considerações a respeito do que foi comentado até aqui:

- i. A região retangular  $R$  é chamada de **região de integração**.
- ii. A Equação (3) é chamada de **soma de Riemann de  $z = f(x, y)$**  sobre a região de integração  $R$ .
- iii. O limite proposto em (5) independe da forma pela qual  $R$  foi subdividida e dos pontos de amostragem.

Stewart (2017b) ainda relata que o significado preciso do limite apresentado em (5) é que, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existirá um número inteiro  $N$ , tal que:

$$\left| \int \int_R f(x, y) dA - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \right| < \varepsilon \quad (6)$$

Note que (6) é válida para todos os inteiros  $m$  e  $n$  maiores que  $N$  e para qualquer ponto de amostragem em  $R_{ij}$ .

Outro ponto destacado por Stewart (2017b) é relacionado à escolha dos pontos de amostragem. Os pontos  $x_{ij}^*$  e  $y_{ij}^*$  podem ser escolhidos em qualquer local dentro dos limites de  $R_{ij}$ , mas, caso sejam escolhidos apenas os pontos do canto superior de  $R_{ij}$ , ou seja,  $x_i$  e  $y_i$ , de acordo com a Figura 4.3, a equação (5) se reduz a

$$\int \int_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A \quad (7)$$

Dito isso, uma função  $f(x, y)$  será considerada **integrável** se o limite proposto em (5) existir. De uma forma mais geral, cursos avançados de cálculo mostram que todas as funções contínuas são integráveis (STEWART, 2017b).

**Exemplo 1.1:** Estime o volume do sólido que se encontra acima da região  $R = [0, 2] \times [0, 2]$  e abaixo do parabolóide definido pela função  $z = 9 - 2x^2 - y^2$ . Para isso, divida

$R$  em quatro regiões iguais e escolha os pontos de amostragem nos cantos superiores direitos de cada quadrado  $R_{ij}$ .

### Solução

Na Figura 4.5, tem-se uma representação de  $R$  no plano cartesiano, destacando-se também os quatro pontos de amostragem pedidos no enunciado.

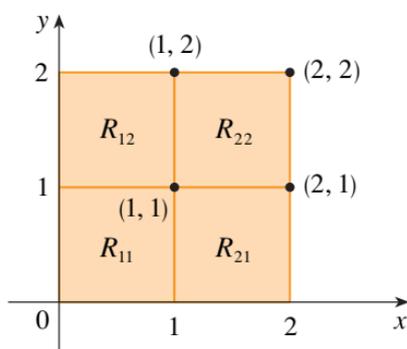


Figura 4.5 - Representação de  $R = [0,2] \times [0,2]$  e dos pontos de amostragem

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 877).

Analisando a Figura 4.5, percebe-se que a área de cada quadrado  $R_{ij}$  será  $\Delta A = \Delta x \Delta y = 1 \cdot 1 = 1$ . Como  $R$  foi dividida em quatro regiões iguais, tem-se também que  $m = n = 2$ . Basta, então, aplicar a equação (3), pois o volume de um sólido pode ser aproximado por uma soma de Riemann:

$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Delta A \cdot f(x_i, y_i) \\
 &= f(1,1) \cdot \Delta A + f(2,1) \cdot \Delta A + f(1,2) \cdot \Delta A + f(2,2) \cdot \Delta A \\
 &= f(1,1) \cdot 1 + f(2,1) \cdot 1 + f(1,2) \cdot 1 + f(2,2) \cdot 1 \\
 &= (9 - 2 \cdot 1^2 - 1^2) + (9 - 2 \cdot 2^2 - 1^2) + (9 - 2 \cdot 1^2 - 2^2) + (9 - 2 \cdot 2^2 - 2^2) \\
 &= 6 + 0 + 3 + (-3) = 6
 \end{aligned}$$

Veja que, conforme você aumenta a quantidade de quadrados para calcular esse volume, o resultado irá se alterando. Por exemplo, se você repetir o procedimento dividindo  $R$  em oito regiões iguais, o que resulta em 16 pontos, você deverá encontrar  $V = 13,5$ ; já com o uso de dezesseis regiões iguais, o que resulta em 64 pontos, você deverá encontrar  $V = 16,875$ ; finalmente, com a divisão de  $R$  em 32 regiões iguais, resultando em 256 pontos, você encontrará  $V = 18,4688$ . Caso aumente ainda mais a divisão da região  $R$ , mais você se aproximará do valor real desse volume, que é igual a 20.

### Propriedades das integrais duplas

Leithold (1994) e Flemming e Gonçalves (2005) apresentam algumas propriedades úteis para o trabalho com integrais duplas. Antes de analisarmos essas propriedades, é preciso considerar que a fronteira da região de integração  $R$  será formada por uma quantidade finita de arcos com curvas suaves, assim como as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  são contínuas em  $R$ . Com isso, garante-se que as integrais duplas, apresentadas a seguir, existem.

Vejamos, então, essas propriedades das integrais duplas apresentadas por Leithold (1994) e Flemming e Gonçalves (2005):

- i. *A multiplicação por uma constante*: se a função  $f(x, y)$  for diferenciável em uma região fechada  $R$ , então a função  $k \cdot f$  também será integrável em  $R$  e

$$\int \int_R k \cdot f(x, y) dA = k \cdot \int \int_R f(x, y) dA$$

- ii. *A soma de funções*: se as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  forem diferenciáveis em uma região fechada  $R$ , então a função  $f + g$  também será integrável em  $R$  e

$$\int \int_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \int \int_R f(x, y) dA + \int \int_R g(x, y) dA.$$

- iii. Se as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  forem diferenciáveis em uma região fechada  $R$ , e, para todo  $(x, y) \in R$ ,  $f(x, y) \geq g(x, y)$ , então:

$$\int \int_R f(x, y) dA \geq \int \int_R g(x, y) dA$$

- iv. Se a função  $f(x, y)$  for diferenciável em uma região fechada  $R$  e  $m$  e  $n$  forem números reais, tal que  $m \leq f(x, y) \leq n$  para todo  $(x, y) \in R$ , então, sendo  $A$  a área da região  $R$ , tem-se que:

$$mA \leq \int \int_R f(x, y) dA \leq nA$$

- v. De forma semelhante à propriedade iv, se, para todo  $(x, y) \in R$  tem-se que  $f(x, y) \geq 0$ , então

$$\int \int_R f(x, y) dA \geq 0$$

- vi. Se a região  $R$  for composta por duas outras regiões,  $R_1$  e  $R_2$ , as quais não apresentam pontos em comum, exceto talvez pelos pontos de sua fronteira, como mostra a Figura 4.6, então

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int \int_{R_1} f(x, y) dA + \int \int_{R_2} f(x, y) dA$$

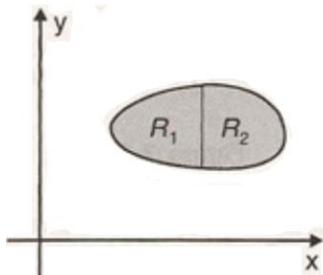


Figura 4.6 - Representação da região  $R$ , composta pelas regiões  $R_1$  e  $R_2$

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 232).

A prova de todas essas propriedades é semelhante às provas realizadas para as propriedades semelhantes das integrais de funções de uma única variável. Então, as provas das seis propriedades apresentadas anteriormente podem ser feitas simplesmente com a definição dada para integral dupla e com as propriedades de limite. Então, caro(a)

aluno(a), caso deseje praticar um pouco a análise matemática e relembrar os conceitos de limite, um bom exercício é provar as cinco propriedades listadas acima.

## ATIVIDADES

1) Considere o sólido delimitado acima da região  $R = [0,4] \times [0,4]$  e abaixo da curva da função  $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ . Visando, então, a fixação prática do cálculo de volume de sólidos, assinale a alternativa correta. Note que  $u =$  unidade de comprimento genérica.

Estime o volume do sólido que se encontra acima da região  $R$  e abaixo do parabolóide definido pela função  $z$ . Para isso, divida  $R$  em quatro regiões iguais e escolha os pontos de amostragem nos cantos superiores direitos de cada quadrado  $R_{ij}$ .

- Ao se dividir  $R$  nas duas regiões iguais  $R_{11} = [0,4] \times [2,4]$  e  $R_{21} = [2,4] \times [4,4]$ , considerando os pontos de amostragem como aqueles no canto superior direito, o volume estimado do sólido será  $96 u^2$ .
- Ao se dividir  $R$  em oito regiões iguais, dividindo o lado  $x$  em quatro e o lado  $y$  em dois, considerando os pontos de amostragem como aqueles no centro de cada  $R_{ij}$ , o volume estimado do sólido será aproximadamente  $80,6 u^2$ .
- Ao se dividir  $R$  em quatro regiões iguais, considerando os pontos de amostragem como aqueles no canto superior direito de cada  $R_{ij}$ , o volume estimado do sólido será aproximadamente  $79,0 u^2$ .
- Ao se dividir  $R$  em oito regiões iguais, dividindo o lado  $x$  em quatro e o lado  $y$  em dois, considerando os pontos de amostragem como aqueles no canto superior direito de cada  $R_{ij}$ , o volume estimado do sólido será aproximadamente  $81,1 u^2$ .
- Ao se dividir  $R$  em quatro regiões iguais, considerando os pontos de amostragem como aqueles no centro de cada  $R_{ij}$ , o volume estimado do sólido será aproximadamente  $61,2 u^2$ .

## INTEGRAIS DUPLAS: CÁLCULOS E APLICAÇÕES

Tendo em mãos os conceitos básicos de integral dupla e suas respectivas propriedades, agora, devemos analisar o assunto dando um enfoque mais prático. Até o momento, o cálculo das integrais duplas era feito de forma iterativa, o que se mostra uma tarefa consideravelmente trabalhosa. Será avaliada, então, a possibilidade de existir uma maneira mais prática de calcular a integral dupla de uma função. Em seguida, as aplicações desse conceito serão brevemente discutidas e analisadas.

### Cálculo de integrais duplas

Thomas Jr. (2016) apresenta o seguinte problema: considere que se deseja calcular o volume do sólido limitado pela função  $z = 4 - x - y$  e acima da região retangular  $R = [0,2] \times [0,1]$  no plano  $xy$ . Esse problema pode ser resolvido utilizando-se o método das seções transversais, que considera seções perpendiculares ao eixo  $x$ . Então, sendo  $A(x)$  a área de seção transversal em  $x$ , o volume desse sólido será

$$V = \int_{x=0}^{x=2} A(x) dx \quad (8)$$

Com esse método, para cada valor de  $x$ , essa área  $A(x)$  pode ser calculada pela seguinte integral

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy \quad (9)$$

Note que (8) nada mais é do que a área sob a curva de  $z$  no plano da seção transversal em  $x$ . Então, ao calcular  $A(x)$ ,  $x$  será fixado e a integração será feita apenas em relação a  $y$ . Combinando, então, as equação (8) e (9), percebe-se que o volume do sólido pode ser avaliado como:

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{x=2} \left[ \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy \right] dx = \int_{x=0}^{x=2} \left( 4y - xy - \frac{y^2}{2} \right)_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left( \frac{7 - 2x}{2} \right) dx = \left( \frac{7x - x^2}{2} \right)_{x=0}^{x=2} = 5 \end{aligned}$$

Ou seja, vimos que o volume do sólido pôde ser avaliado pela seguinte equação:

$$V = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy dx \quad (10)$$

A expressão da direita em (10) é conhecida como **integral repetida** ou **integral iterada**. Stewart (2017b) destaca que esse método foi realizado mantendo-se uma das variáveis fixas, nesse caso, a variável  $x$ , enquanto a função era integrada para a outra variável, nesse caso, a variável  $y$ , de uma forma muito semelhante àquela que foi vista para os processos de derivação parcial. Assim, esse processo de integração também pode ser conhecido como **integração parcial**.

Perceba que você pode realizar esse processo fixando inicialmente a variável  $y$  enquanto a função  $f(x, y)$  é integrada em relação à  $x$ . Assim, para o problema proposto no início desta seção, teriam-se duas equações semelhantes às equações (8) e (9):

$$V = \int_{y=0}^{y=1} A(y) dy \quad (11)$$

$$A(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y) dx \quad (12)$$

Resolvendo, então, o problema com essa abordagem, pela combinação das equações (11) e (12):

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=1} \left[ \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y) dx \right] dy = \int_{y=0}^{y=1} \left( 4x - \frac{x^2}{2} - xy \right)_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y) dy = (6y - y^2)_{y=0}^{y=1} = 5 \end{aligned}$$

Note que o resultado encontrado aqui é igual àquele encontrado anteriormente. Esse resultado é esperado, visto que a integral dupla simplesmente mede o volume de uma mesma região, segundo Thomas Jr. (2016). De fato, um teorema publicado em 1907 pelo matemático italiano Guido Fubini expõe que toda integral dupla de qualquer função contínua em uma região retangular pode ser calculada como uma integral iterada em qualquer sequência de integração:

**Teorema 1 - O Teorema de Fubini na primeira forma:** Seja uma função  $f(x, y)$  contínua em um espaço retangular  $R = [a, b] \times [c, d]$ , então, suas integrais duplas obedecem à seguinte relação:

$$\int \int_R f(x, y) dA = V = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

A Figura 4.7 apresenta graficamente o desenvolvimento desse método. Em tal figura, a área de seção transversal, na qual se mantém uma variável fixa enquanto a outra é usada na integração, encontra-se destacada.

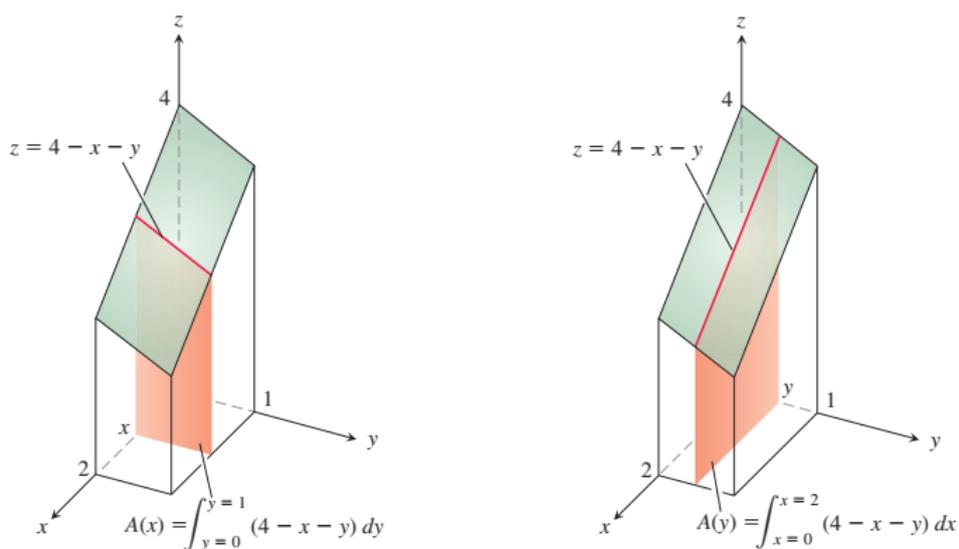


Figura 4.7 - Áreas de seção transversal enquanto se mantém uma variável fixa na integração dupla

Fonte: Adaptada de Thomas Jr. (2016, p. 886, 887).

**Exemplo 2.1:** Calcule a integral dupla da função  $z = f(x, y) = 9 - 2x^2 - y^2$  apresentada no Exemplo 1.1 para a região  $R = [0, 2] \times [0, 2]$ . Em seguida, compare o resultado encontrado com aqueles mostrados no Exemplo 1.1.

### Solução

Aplicando o Teorema de Fubini para a função dada:

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=2} f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2} f(x, y) dy dx$$

Escolhendo a primeira forma para resolver:

$$\begin{aligned} \int \int_R f(x, y) dA &= \int_{y=0}^{y=2} \left[ \int_{x=0}^{x=2} (9 - 2x^2 - y^2) dx \right] dy \\ &= \int_{y=0}^{y=2} \left[ \left( 9x - \frac{2}{3}x^3 - xy^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=2} \right] dy = \int_{y=0}^{y=2} \left( \frac{38 - 6y^2}{3} \right) dy \\ &= \left( \frac{38y}{3} - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=2} = 20 \end{aligned}$$

Note que, avaliando essa integral dupla de forma reversa, o mesmo resultado é encontrado:

$$\begin{aligned} \int \int_R f(x, y) dA &= \int_{x=0}^{x=2} \left[ \int_{y=0}^{y=2} (9 - 2x^2 - y^2) dy \right] dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left[ \left( 9y - 2x^2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=2} \right] dx = \int_{x=0}^{x=2} \left( \frac{46 - 12x^2}{3} \right) dx \\ &= \left( \frac{46x}{3} - \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=2} = 20 \end{aligned}$$

Veja que, ao usar apenas quatro regiões para a aproximação, você encontrou 6 como resultado da integral dupla. Aumentando a quantidade de regiões utilizadas no cálculo, o resultado encontrado foi 16,875 para dezesseis regiões e 18,4688 para 32 regiões iguais.

Ou seja, conforme a quantidade de prismas retos usados no cálculo aumentou, o resultado se aproximou do valor teórico, que é 20.

Pode-se expandir o que foi exposto até aqui. Note que nem sempre a região na qual iremos avaliar a integral dupla será retangular. Assim, Flemming e Gonçalves (2005) indicam que pode ser que se tenha um dos seguintes tipos de região para avaliar a integral dupla:

- a. **Tipo 1:** tem-se que  $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$  e  $a \leq x \leq b$ , sendo as funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  contínuas em  $[a, b]$ .
- b. **Tipo 2:** tem-se que  $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$  e  $c \leq y \leq d$ , sendo as funções  $g_1(y)$  e  $g_2(y)$  contínuas em  $[c, d]$ .

No caso de uma integral dupla do tipo 1, tem-se uma região delimitada de acordo com o que se vê na Figura 4.8.

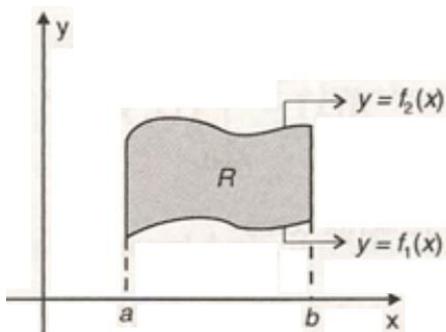


Figura 4.8 - Representação de uma região do tipo 1

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 233).

Para tal situação, a integral dupla de uma função  $f(x, y)$  será calculada da seguinte maneira:

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (13)$$

Geometricamente, a integral interna de (13), ou seja

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \quad (14)$$

pode ser interpretada como uma área de seção transversal perpendicular ao eixo  $x$  do sólido cujo volume se deseja calcular, como é mostrado na Figura 4.9.

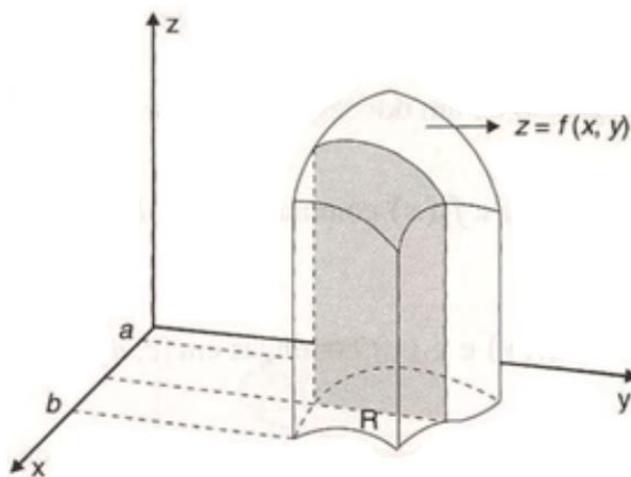


Figura 4.9 - Representação gráfica da integral interna da equação (13)

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 234).

Essa integral (14) pode, ainda, ser representada como  $A(x)$ :

$$A(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \quad (15)$$

De forma que (13) pode ser reescrita como:

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_a^b A(x) dx \quad (16)$$

Para uma integral dupla do tipo 2, um pensamento semelhante pode ser desenvolvido. Aqui, tem-se uma região delimitada de acordo com a Figura 4.10.

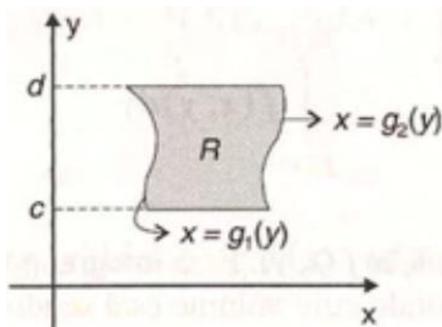


Figura 4.10 - Representação de uma região do tipo 2

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 234).

Para esse tipo de problema, a integral dupla de uma função  $f(x, y)$  será calculada da seguinte maneira:

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy \quad (17)$$

**Exemplo 2.2:** Calcule o volume do sólido delimitado superiormente pela função  $z = f(x, y) = 4 - x - y$  e inferiormente pela região  $R$ , na qual  $0 \leq x \leq 2$  e pela reta que passa pelos pontos  $y = 0$  e  $y = x$ .

### Solução

Esta é uma integral dupla do tipo 1 descrita anteriormente. Logo, o volume desse sólido poderá ser avaliado utilizando-se a equação (13):

$$V = \int \int_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Os pontos  $a$  e  $b$  já estão determinados, então, deve-se avaliar agora os limites  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ . Como foi dito ser uma reta, os limites de  $y$  podem ser definidos como  $0 \leq y \leq x$ .

Resolvendo, então, a integral dupla apresentada:

$$V = \int \int_R f(x, y) dA = \int_0^2 \left[ \int_0^x (4 - x - y) dy \right] dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \left[ \left( 4y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=x} \right] dx = \int_0^2 \left( 4x - \frac{3x^2}{2} \right) dx \\
 &= \left( 2x^2 - \frac{x^3}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=2} = 4
 \end{aligned}$$

**Exemplo 2.3:** Calcule a integral dupla da função  $z = f(x, y) = x + y$ , delimitada pela região  $R$ , definida entre  $y = 2x^2$  e  $y = 4x$ .

### Solução

A região de integração se encontra entre uma reta e uma parábola, como se evidencia na Figura 4.11.

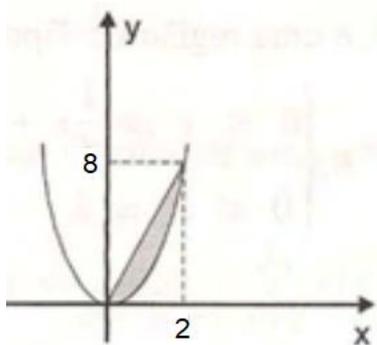


Figura 4.11 - Representação da região  $R$  descrita no problema

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 236).

Com isso, pode-se notar que essa integral dupla pode ser tanto do tipo 1 quanto do tipo 2, pois a região  $R$  pode ser descrita como:

$$R = \begin{cases} 2x^2 \ll y \ll 4x \\ 0 \ll x \ll 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad R = \begin{cases} y/4 \ll x \ll \sqrt{y/2} \\ 0 \ll y \ll 8 \end{cases}$$

Calculando, então, essa integral considerando-a como sendo do tipo 1:

$$V = \int \int_R f(x, y) dA = \int_0^2 \int_{2x^2}^{4x} (x + y) dy dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \left[ \left( xy + \frac{y^2}{2} \right)_{y=2x^2}^{y=4x} \right] dx = \int_0^2 (12x^2 - 2x^3 - 2x^4) dx \\
 &= \left( 4x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{2x^5}{5} \right)_{x=0}^{x=2} = \frac{56}{5}
 \end{aligned}$$

E calculando-a considerando como uma integral dupla do tipo 2:

$$\begin{aligned}
 V &= \int \int_R f(x, y) dA = \int_0^8 \int_{y/4}^{\sqrt{y/2}} (x + y) dx dy \\
 &= \int_0^8 \left[ \left( xy + \frac{x^2}{2} \right)_{x=y/4}^{x=\sqrt{y/2}} \right] dy = \int_0^8 \left( \frac{1}{2} y \sqrt{2} \sqrt{y} + \frac{1}{4} y - \frac{9}{32} y^2 \right) dy \\
 &= \left( \frac{\sqrt{2}}{5} y^2 \sqrt{y} + \frac{1}{8} y^2 - \frac{3}{32} y^3 \right)_{y=0}^{y=8} = \frac{56}{5}
 \end{aligned}$$

Note que, apesar dos resultados serem os mesmos, o segundo cálculo pode ser visto como ligeiramente mais complexo. Logo, uma boa escolha do tipo de integral dupla a ser avaliado pode facilitar muito o seu trabalho.

### Mudando as variáveis nas integrais duplas

Quando se tem um caso de uma integral de uma função de única variável se mostrar muito complexa, pode-se mudar as variáveis dessa função, buscando-se uma maneira mais simples de avaliar tal integral, segundo Flemming e Gonçalves (2005). Nesse caso:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt$$

sendo  $a = g(c)$  e  $b = g(d)$ . Assim, pode-se notar que a mudança das variáveis na integração definida faz com que os limites de integração também se alterem.

Como muito do que foi visto e trabalhado até o momento para o cálculo com funções de duas variáveis, um método semelhante pode ser proposto para as integrais duplas. Assim, Flemming e Gonçalves (2005) indicam que, por meio da seguinte mudança de variáveis

$$x = x(u, v) \quad \text{e} \quad y = y(u, v) \quad (18)$$

a integral dupla sobre uma região  $R$  localizada no plano  $xy$  pode ser avaliada em uma região  $R'$  localizada no plano  $uv$ .

Geometricamente, Flemming e Gonçalves (2005) relatam que as mudanças de variáveis citadas simplesmente definem uma aplicação ou transformação que faz os pontos de  $uv$  a pontos de  $xy$ , da mesma forma que se tem na definição de uma função. Assim, a região  $uv$  pode ser aplicada na região  $xy$ . Disso, tem-se que, se a transformação proposta leva pontos distintos de  $R'$  a um único ponto de  $R$ , tem-se uma transformação um para um ou **bijetora**, o que garante que a transformação reversa também é possível:

$$u = u(x, y) \quad \text{e} \quad v = v(x, y) \quad (19)$$

Se as funções (18) e (19) forem contínuas e apresentarem derivadas parciais contínuas em  $R'$  e  $R$ , respectivamente, então:

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \int \int_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (20)$$

Note que, em (20), o termo  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  é o jacobiano de  $x$  e  $y$  em relação às novas variáveis  $u$  e  $v$ , o qual é dado por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Flemming e Gonçalves (2005) ainda destacam alguns pontos sobre esse assunto:

- i. Discutir sobre em quais regiões a equação (20) é válida se mostra extremamente complexo, sendo relegado a cursos de Análise Matemática ou de Cálculo Avançado, o que foge do escopo deste material.
- ii. O cumprimento de três condições garante a validade de (20):
  - a. A função  $f$  é contínua.
  - b. As regiões  $R$  e  $R'$  devem ser formadas por um número finito de regiões menores que sejam do tipo 1 ou 2 descritos no início da seção 2.1.
  - c. O jacobiano deve ser diferente de zero em  $R'$  ou se anula apenas em um número finito de pontos de  $R'$ .
- iii. O jacobiano apresentado em (20) pode ser interpretado como uma medida de quão modificada a região será pela aplicação da transformação (18).

### Coordenadas polares

Suponha que você se depare com um problema no qual tenha que calcular a integral dupla de uma função em uma região  $R$  em uma das formas a seguir.

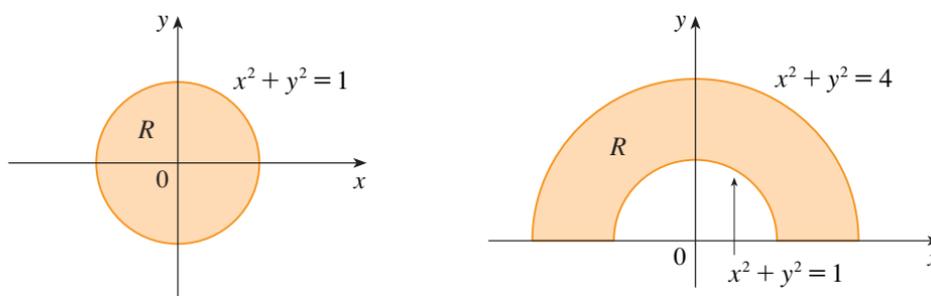


Figura 4.12 - Representação de regiões circulares e anelares

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 895).

Veja que é complexo descrever essas duas regiões  $R$  em coordenadas retangulares. No entanto, fazendo-se o uso de coordenadas polares, o trabalho fica consideravelmente mais simples. Para as regiões acima, tem-se, respectivamente,

$$R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad \text{e} \quad R = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Segundo Stewart (2017b), as coordenadas polares  $(r, \theta)$  de um ponto se relacionam com as coordenadas retangulares  $(x, y)$  da seguinte forma, como se pode confirmar pela Figura 4.13.

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

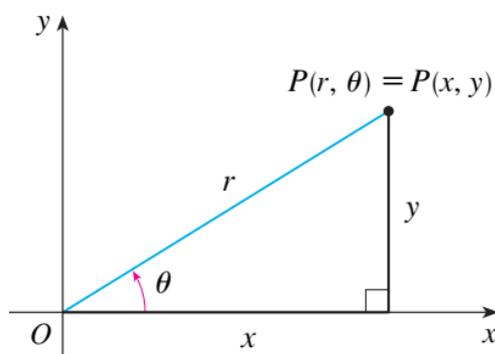


Figura 4.13 - Representação das coordenadas polares

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 895).

Assim, Stewart (2017b) diz que, com essas transformações, as regiões expostas na Figura 4.12 nada mais são do que casos especiais de um **retângulo polar**, ou seja:

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

Esse retângulo polar é evidenciado na Figura 4.14 a). Então, para avaliar a integral dupla de uma função em uma região que é um retângulo polar, divide-se o intervalo fechado  $[a, b]$  em  $m$  subintervalos  $[r_{i-1}, r_i]$ , sendo que todos esses subintervalos apresentam a mesma largura  $\Delta r = (b - a)/m$ , e o intervalo fechado  $[\alpha, \beta]$  em  $n$  subintervalos  $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ , também com a mesma largura  $\Delta \theta = (\beta - \alpha)/n$ . Com isso, círculos  $r = r_i$  e os raios  $\theta = \theta_j$  irão dividir  $R$  em retângulos polares menores  $R_{ij}$ , como mostra a Figura 4.14 b).

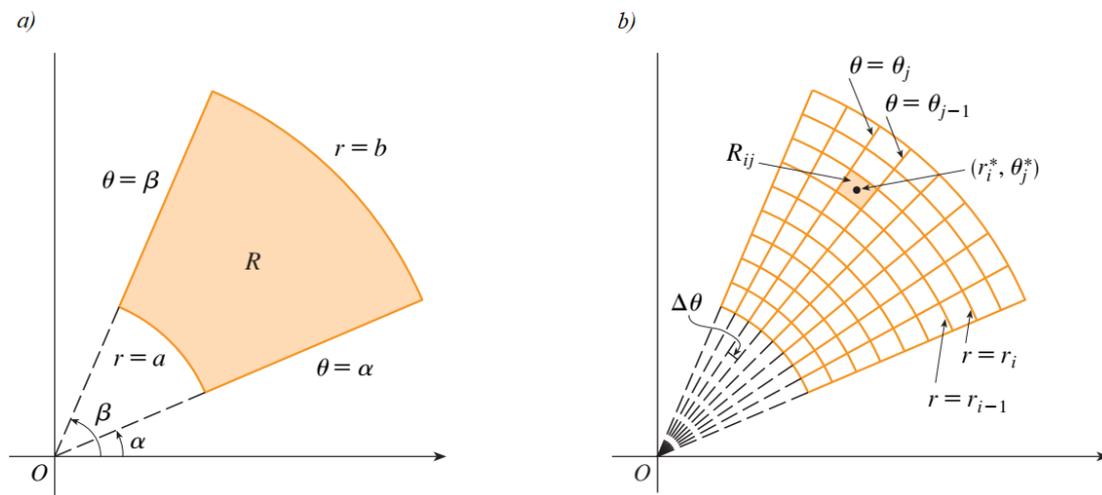


Figura 4.14 - a) Representação de um retângulo polar e b) Divisão de  $R$  em vários retângulos polares menores  $R_{ij}$

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 896).

Com isso, o centro de um desses retângulos polares menores descritos por  $R = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$  deverá apresentar como coordenadas:

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \text{e} \quad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Agora, é preciso identificar como determinar a área de cada retângulo  $R_{ij}$ . Segundo Stewart (2017b), isso pode ser feito considerando-se que a área de um setor de círculo de raio igual a  $r$  e ângulo central  $\theta$  deve ser  $\frac{1}{2}r^2\theta$ . Fazendo, então, a subtração das áreas de dois desses setores cujo ângulo central é  $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$ , descobre-se a área:

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})\Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta \end{aligned}$$

Então, com o que foi exposto até aqui, pode-se expressar a soma de Riemann para um retângulo polar. Sendo as coordenadas retangulares do centro de um  $R_{ij}$   $(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*)$ , a soma de Riemann para esse caso se torna:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta A_i \cdot f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \cdot r_i^* \Delta r \Delta \theta \end{aligned} \quad (21)$$

Você pode tornar (21) ainda mais parecida com a soma de Riemann do caso das coordenadas retangulares, fazendo a consideração

$$g(r, \theta) = r f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Com isso, a soma de Riemann fica:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \cdot \Delta r \Delta \theta \quad (22)$$

Para a qual se tem a integral dupla ao tomar o limite com  $m, n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \int \int_R f(x, y) dA &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta A_i \cdot f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \cdot \Delta r \Delta \theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned} \quad (23)$$

**Exemplo 2.4:** Calcule a integral dupla da função  $z = f(x, y) = 3x^2 + 4y$ , em que a região  $R$  é a região no semiplano superior definida pelos círculos  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ .

### Solução

A região  $R$  pode ser descrita como  $R = \{(x, y) \mid y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Essa região é idêntica ao anel mostrado na Figura 4.12, sendo fácil verificar por essa figura que, em coordenadas polares, tem-se  $1 \leq r \leq 2$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Portanto, aplicando as mudanças de coordenadas  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  e a equação (23):

$$\begin{aligned} \int \int_R (3x^2 + 4y) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos^2 \theta + 4r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^3 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ \left( \frac{3}{4} r^4 \cos^2 \theta + \frac{4}{3} r^3 \sin \theta \right) \right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{45}{4} \cos^2 \theta + \frac{28}{3} \sin \theta \right) d\theta = \left( \frac{45}{16} \sin 2\theta + \frac{45}{8} \theta + \frac{28}{3} \cos \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= \frac{45}{8} \pi + \frac{56}{3} \end{aligned}$$

**Exemplo 2.5:** Determine o volume do sólido delimitado pelo plano  $z = 0$  e pelo parabolóide  $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ .

### Solução

Tomando  $z = 0$  na função dada, tem-se que  $x^2 + y^2 = 4$ . Então, o plano intercepta o parabolóide no círculo  $x^2 + y^2 = 4$ , sendo que o sólido se encontra acima desse círculo. Tem-se, então, em coordenadas polares, que essa região é descrita por  $0 \leq r \leq 2$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Portanto, aplicando as mudanças de coordenadas  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  e a equação (23):

$$\int \int_R (4 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [4 - r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( 2r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right)_{r=0}^{r=2} d\theta = \int_0^{2\pi} 4 d\theta \\
 &= (4\theta)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 8\pi
 \end{aligned}$$

### Aplicações

As integrais duplas apresentam uma série de aplicações, nas mais diversas áreas. Uma das mais comuns, como foi visto em praticamente todo o desenvolvimento do assunto, é para o cálculo do volume.

Além disso, Flemming e Gonçalves (2005) ainda indicam que as integrais duplas podem ser empregadas para avaliar áreas de regiões planas. Isso acontece caso a função  $f(x, y)$  seja igual a 1. Nesse caso:

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int \int_R dA$$

Assim, por exemplo, se a região  $R$  for do tipo 1, tem-se:

$$\begin{aligned}
 A &= \int \int_R dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy dx = \int_a^b (y)_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\
 &= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \tag{24}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 2.6** (Flemming e Gonçalves, 2005): Determine a área da região  $R$  delimitada por  $x = y^2 + 1$  e  $y = 3 - x$ .

### Solução

Essa região é evidenciada na Figura 4.15.

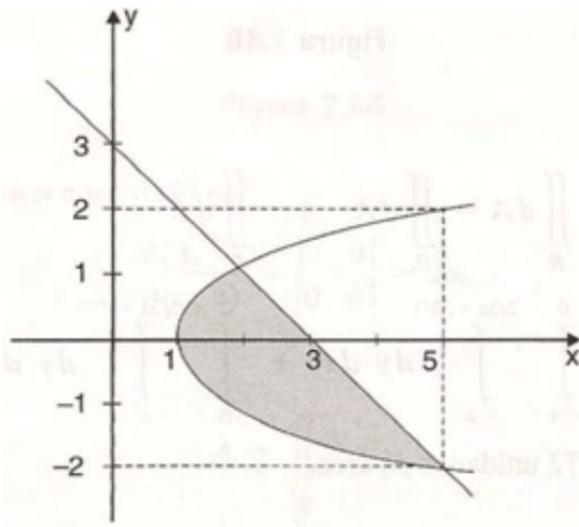


Figura 4.15 - Representação da região  $R$  descrita

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2005, p. 263).

Aplicando a equação (24):

$$A = \int \int_R dA = \int_{-2}^1 \int_{y^2+1}^{3-y} dx dy = \int_{-2}^1 (x)_{y^2+1}^{3-y} dy$$

$$\int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = \left( 2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right)_{y=-2}^{y=1} = 9/2$$

Além de áreas e volumes, as integrais duplas podem ser também empregadas em diversos tópicos de física, como no cálculo da massa, do centro da massa e do momento de inércia.

## ATIVIDADE

- 2) Visando a prática de cálculo de integrais duplas em coordenadas modificadas, calcule a integral dupla da função  $f(x, y) = x^2 + 2y$  em uma região  $D$  que é delimitada pelas parábolas  $y = 2x^2$  e  $y = 1 + x^2$ . Assinale, então, a alternativa correta.
- a) A integral dupla em questão é avaliada em uma região tipo 1, cujo resultado é igual a  $32/5$ .
  - b) A integral dupla em questão é avaliada em uma região tipo 1, cujo resultado é igual a  $12/5$ .
  - c) A integral dupla em questão é avaliada em uma região tipo 2, cujo resultado é igual a  $12/5$ .
  - d) A integral dupla em questão é avaliada em uma região tipo 2, cujo resultado é igual a  $32/5$ .
  - e) A integral dupla em questão é avaliada em uma região tipo 1, cujo resultado é igual a  $4/5$ .

## INTEGRAIS TRIPLAS

Vamos, agora, caro(a) aluno(a), expandir tudo o que foi visto até aqui para outro caso de integração: o caso da integral tripla. Stewart (2017b) indica que o processo para determinar esse tipo de integral pode ser avaliado de forma semelhante ao que foi descrito para as integrais duplas. No entanto, no caso das integrais triplas, a região onde a integral tripla é avaliada já é tridimensional, acarretando a falta de uma analogia geométrica mais simples de se realizar.

Então, iniciaremos os estudos considerando uma das mais simples formas de região tridimensional: uma caixa retangular. Essa construção tridimensional pode ser representada da seguinte forma:

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\} \quad (25)$$

Essa região  $R$  pode ser subdividida em  $B$  caixas menores, fazendo o intervalo  $[a, b]$  ser dividido em  $l$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , todos com o mesmo comprimento  $\Delta x = (b - a)/l$ , o intervalo  $[c, d]$  ser dividido em  $m$  subintervalos  $[y_{j-1}, y_j]$ , todos com o mesmo comprimento  $\Delta y = (d - c)/m$  e o intervalo  $[r, s]$  ser dividido em  $n$  subintervalos  $[z_{k-1}, z_k]$  de mesmo comprimento  $\Delta z = (s - r)/n$ . Com isso, cada uma dessas caixas menores é descrita como:

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \quad (26)$$

Esse procedimento está ilustrado na Figura 4.16.

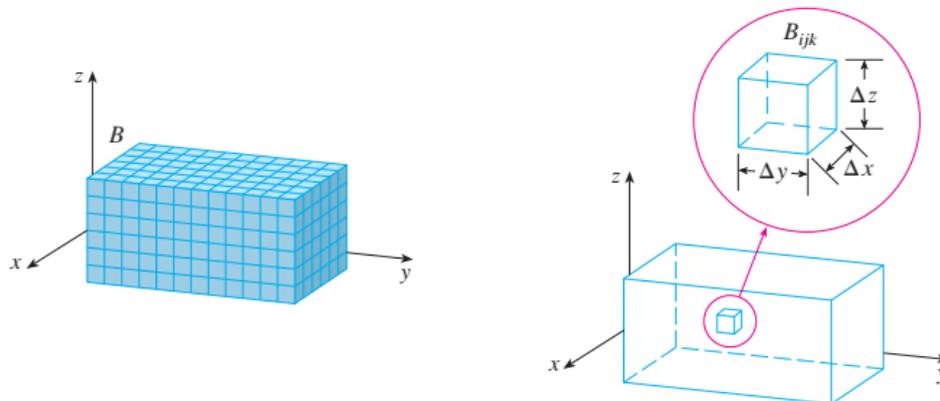


Figura 4.16 - Representação de  $B$  em diversas caixas  $B_{ijk}$ .

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 913).

Note que o volume de cada uma dessas caixas  $B_{ijk}$  é  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Pode-se propor a soma tripla de Riemann para esse caso:

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \cdot \Delta V \quad (27)$$

sendo que  $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$  simplesmente é um ponto de amostragem localizado em algum ponto das caixas  $B_{ijk}$ . Então, por analogia ao caso da integral dupla, pode-se definir a integral tripla como o limite de  $l, m, n \rightarrow \infty$  da soma tripla de Riemann, caso esse limite exista:

$$\begin{aligned} \int \int_B \int f(x, y, z) dV \\ = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (28)$$

De forma análoga também, pode-se propor uma extensão do Teorema de Fubini para as integrais triplas.

**Teorema 2 - O Teorema de Fubini para integral tripla:** Seja uma função  $f(x, y, z)$  contínua em um espaço retangular  $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ , então, as integrais triplas obedecem à seguinte relação:

$$\int \int_B \int f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \quad (29)$$

Ou seja, de acordo com esse teorema, mantém-se  $y$  e  $z$  constantes e integra-se em relação a  $x$ . Em seguida, mantém-se  $z$  constante e integra-se em relação a  $y$ . E, finalmente, integra-se o resultado em relação à  $z$ . Note que é possível alterar a ordem de integração, assim como se faz no caso da integral dupla.

**Exemplo 3.1:** Avalie a integral tripla da função  $f(x, y, z) = xyz$  na região  $B = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$ .

### Solução

Basta aplicar a equação (29):

$$\begin{aligned} \int \int_B \int f(x, y, z) dV &= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 xyz \, dx dy dz \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \left( \frac{1}{2} x^2 yz \right)_{x=0}^{x=1} dy dz \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \frac{1}{2} yz \, dy dz = \int_0^3 \left( \frac{1}{4} y^2 z \right)_{y=0}^{y=2} dz = \int_0^3 z \, dz = \\ &\quad \left( \frac{1}{2} z^2 \right)_{z=0}^{z=3} = 9/2 \end{aligned}$$

Stewart (2017b) destaca que, essencialmente, as integrais triplas apresentam as mesmas propriedades que as integrais duplas, de modo que as propriedades discutidas na seção 1.2 podem ser estendidas sem problemas para os casos nos quais se busca avaliar uma integral tripla. O mesmo se tem para as aplicações das integrais duplas: todas as

aplicações das integrais duplas podem ser estendidas para as integrais triplas, de modo a ser possível lidar com casos mais complexos.

Retornando para a sequência empregada no caso de integrais duplas, Stewart (2017b) expõe que se deve considerar, agora, o caso de avaliar uma integral tripla em uma região qualquer, não apenas em uma região que seja uma caixa retangular. Por exemplo, considere a região genérica  $E$  exposta na Figura 4.17.

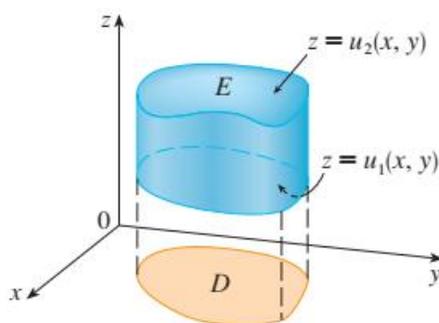


Figura 4.17 - Representação de uma região genérica  $E$

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 914).

Supondo que essa região  $E$  seja limitada, ela pode se encontrar contida em uma região cúbica, semelhante àquela descrita por (25). Considerando esse passo, pode-se definir uma função  $F$ , de modo que  $F$  coincida com a função original  $f$  na região  $E$  e seja igual a zero nos demais pontos fora da região  $E$ . Ou seja:

$$\int \int_E \int f(x, y, z) dV = \int \int_B \int F(x, y, z) dV \quad (30)$$

Para continuarmos as análises, iremos nos restringir a funções que sejam contínuas e a determinados tipos de regiões. O primeiro tipo a ser estudado é aquele no qual a região  $E$  está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de  $x$  e  $y$ . Então, sendo  $D$  a

projeção do sólido  $E$  sobre o plano  $xy$ , como mostra a Figura 4.17, esse caso é dito **tipo 1** e pode ser representado como

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\} \quad (31)$$

Assim, tem-se

$$\int \int_E \int f(x, y, z) dV = \int \int_D \left[ \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA \quad (32)$$

Para esse caso de integral tripla, se a projeção  $D$  for uma região do tipo 1 para o caso da integral dupla, como mostra a Figura 4.18 *a*), então, o que se tem é:

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\} \quad (33)$$

Com isso, a equação (32) se torna:

$$\int \int_E \int f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx \quad (34)$$

Agora, se a projeção  $D$  for uma região do tipo 2 para o caso da integral dupla, como mostra a Figura 4.18 *b*), então, o que se tem é:

$$E = \{(x, y, z) \mid h_1(x) \leq x \leq h_2(x), c \leq y \leq d, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\} \quad (35)$$

Com isso, a equação (32) se torna:

$$\int \int_E \int f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy \quad (36)$$

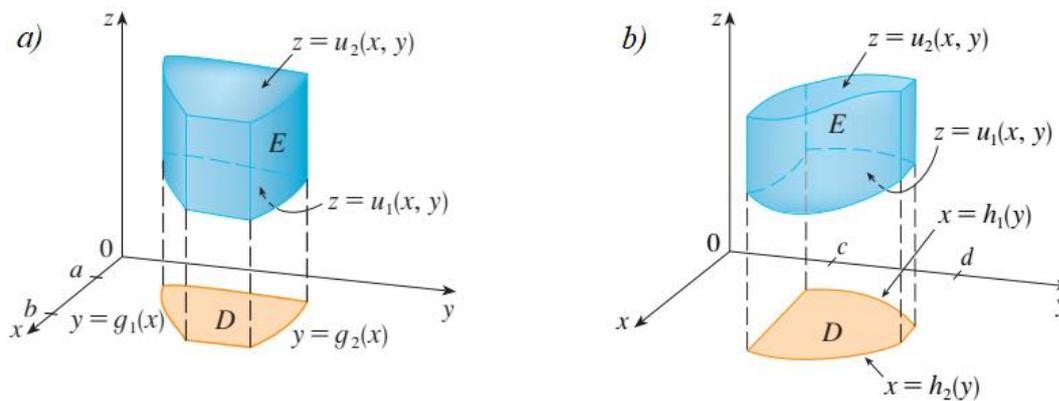


Figura 4.18 - a) Região sólida tipo 1 e projeção do tipo 1 e b) Região sólida tipo 1 e projeção do tipo 2

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 914).

A Figura 4.19 apresenta os outros dois tipos de regiões sólidas a serem considerados nos estudos de integrais triplas.

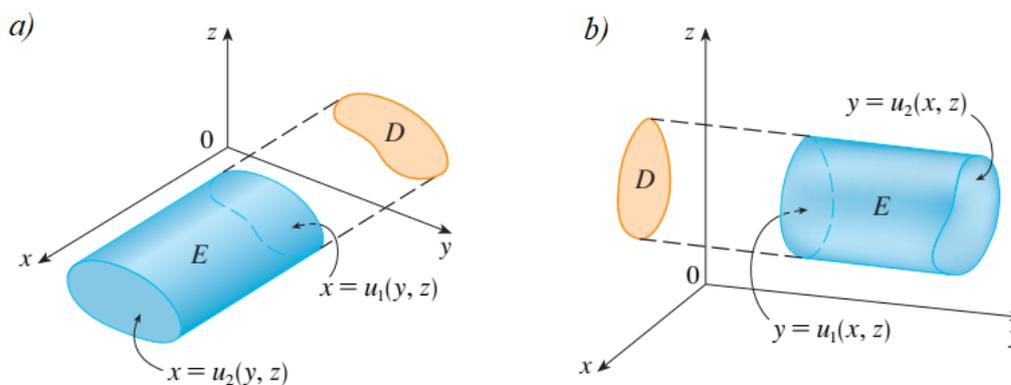


Figura 4.19 - a) Região sólida tipo 2 e b) Região sólida tipo 3

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 915).

O segundo tipo a ser estudado é aquele no qual a projeção do sólido  $E$  se dá sobre o plano  $yz$ , como mostra a Figura 4.19 a). Nesse caso, dito **tipo 2**, a superfície traseira é  $x = u_1(y, z)$  e a superfície frontal é  $x = u_2(y, z)$ . Assim, tem-se:

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\} \quad (37)$$

$$\int \int_E \int f(x, y, z) dV = \int \int_D \left[ \int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA \quad (38)$$

Finalmente, o terceiro tipo é aquele no qual a projeção do sólido  $E$  se dá sobre o plano  $xz$ , como mostra a Figura 4.19 b). Nesse caso, dito **tipo 3**, a superfície esquerda é  $y = u_1(x, z)$  e a superfície direita é  $y = u_2(x, z)$ . Assim, tem-se:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\} \quad (39)$$

$$\int \int_E \int f(x, y, z) dV = \int \int_D \left[ \int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA \quad (40)$$

## FIQUE POR DENTRO

Um ponto que facilita o desenvolvimento dos conceitos de integrais duplas é visualizar o problema como caso de calcular o volume de um sólido. Agora, no caso da integral tripla, um sólido tridimensional já é a região de integração, dificultando a visualização do resultado de uma integral tripla. No entanto uma expansão dos conceitos geométricos pode ser feita aqui: se você for capaz de pensar em quatro dimensões, você pode imaginar o cálculo de uma integral tripla como um caso de “volume” de um hipercilindro ou outra forma geométrica mais complexa. Esses elementos geométricos são muito úteis em áreas de ciência avançada.

Você pode saber mais a respeito desse assunto acessando o *link* disponível em: [http://nautilus.fis.uc.pt/gazeta/revistas/29\\_4/vol29\\_4\\_Art01.pdf](http://nautilus.fis.uc.pt/gazeta/revistas/29_4/vol29_4_Art01.pdf). Acesso em: 29 abr. 2019.

### ATIVIDADE

- 3) Visando à prática de cálculo de integrais triplas, calcule a integral tripla da função  $f(x, y, z) = 2x$  em uma região  $B$  que é delimitada pelos planos coordenados e pelo plano  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$ . Assinale, então, a alternativa correta.
- a) A região onde se deve avaliar essa integral tripla é claramente uma região exclusivamente do tipo 2.
  - b) Avaliando a integral tripla pedida, o resultado será  $3/2$ .
  - c) Avaliando a integral tripla pedida, o resultado será  $1/2$ .
  - d) A região de integração apresentada, caso seja considerada uma região de tipo 3, apresentará como limites  $0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{3} - z$ ,  $0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{3}x$  e  $0 \leq z \leq 1$ .
  - e) : Avaliando a integral tripla pedida, o resultado será  $5/2$ .

## MODIFICAÇÃO DAS VARIÁVEIS EM INTEGRAIS TRIPLAS

Vimos que, na geometria plana, é mais prático utilizar coordenadas polares quando se trabalha com regiões curvas. Já no caso tridimensional, existe mais de uma forma prática de se realizar mudança de variável: nessa situação, geralmente se trabalha com coordenadas cilíndricas e esféricas, como veremos a seguir.

### Coordenadas cilíndricas

Em um sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto  $P$  qualquer deve ser representado pela tripla ordenada  $(r, \theta, z)$ . Dessas coordenadas,  $r$  e  $\theta$  são coordenadas polares da projeção desse ponto  $P$  no plano  $xy$ , enquanto a coordenada  $z$  é a distância orientada entre  $P$  e  $xy$ , como mostra a Figura 4.20 (STEWART, 2017b).

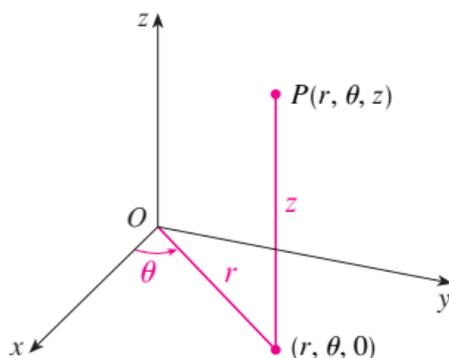


Figura 4.20 - Representação das coordenadas cilíndricas

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 922).

Segundo Stewart (2017b), a mudança das coordenadas cilíndricas para as retangulares pode ser feita mediante as seguintes equações:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad (41)$$

Já a conversão de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas, ocorre da seguinte forma:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad z = z \quad (42)$$

Esse tipo de coordenadas é muito útil para lidar com problemas em que se tem algum tipo de simetria em torno do eixo  $z$ .

### Cálculo de integrais em coordenadas cilíndricas

Primeiramente, suponha que a região de integração  $E$  seja uma região do tipo 1, para a qual a projeção no plano  $xy$  seja feita simplesmente em coordenadas polares, como mostra a Figura 4.21.

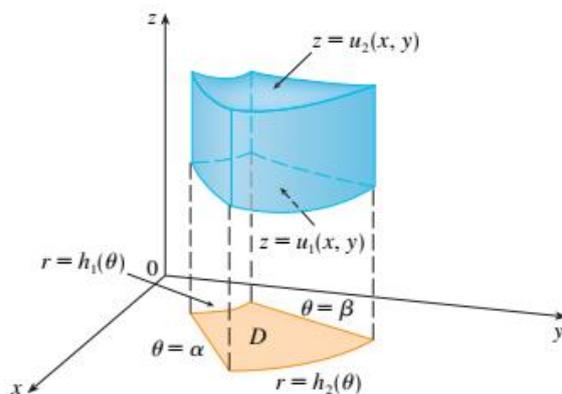


Figura 4.21 - Representação de uma região  $E$  do tipo 1 e sua projeção  $D$  em coordenadas polares

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 924).

Seja a função  $f$  contínua e a região  $E$  definida como

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

sabe-se como é possível avaliar a integral tripla com essas condições: basta aplicar a equação (32). No entanto já foi visto como avaliar uma integral dupla em coordenadas polares. Aplicando, então, o mesmo raciocínio empregado no caso das integrais duplas, a equação (32) pode ser avaliada, em coordenadas cilíndricas, da seguinte forma:

$$\int \int_E \int f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta \quad (43)$$

A equação (43) é conhecida como **fórmula de integração tripla para coordenadas cilíndricas**. Essa fórmula, segundo Stewart (2017b), deve ser empregada para os casos em que a região  $E$  apresenta uma descrição em coordenadas cilíndricas mais simples. Além disso, um caso que geralmente pede o uso desse tipo de integração tripla é quando se tem  $f(x, y, z)$  envolvendo a expressão  $x^2 + y^2$ .

### Coordenadas esféricas

Quando se tem uma região de integração de forma cônica ou esférica, o uso de coordenadas cilíndricas pode ser tão complexo quanto o uso de coordenadas retangulares. Para esses tipos de problemas, é aconselhável o uso de coordenadas esféricas.

No sistema de coordenadas esféricas, um ponto  $P$  qualquer deve ser representado pela tripla ordenada  $(\rho, \theta, \phi)$ . A Figura 4.22 apresenta como localizar um ponto  $P$  nesse sistema de coordenadas. Note que a coordenada  $\rho$  nada mais é do que  $|OP|$ , ou seja, a distância do ponto  $P$  à origem. Já a coordenada  $\theta$  é a mesma definida nas coordenadas cilíndricas. Finalmente, a coordenada  $\phi$  indica o ângulo entre o eixo  $z$  positivo e o segmento de reta  $OP$ . Dito isso, note que  $\rho \geq 0$  e  $0 \leq \phi \leq \pi$  (STEWART, 2017b).

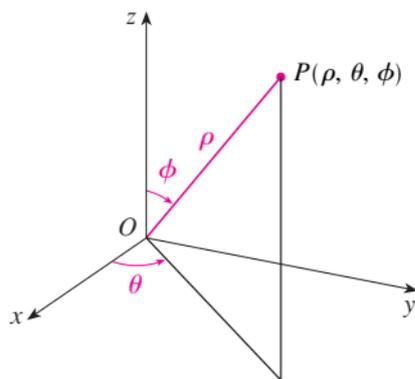


Figura 4.22 - Representação das coordenadas esféricas

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 927).

Esse tipo de coordenadas, além de ser útil para avaliar integrais triplas em regiões esféricas e cônicas, mostra-se muito prático quando se tem problemas com algum tipo de simetria ao redor de um ponto, que deve ser considerado como a origem na análise do problema. Por exemplo, sendo  $c$  um valor real, nas coordenadas esféricas, se  $\rho = c$ , essas coordenadas descrevem uma esfera de raio  $c$ ; se  $\theta = c$ , tem-se um semiplano vertical localizado no ângulo  $c$ ; e se  $\phi = c$ , a região descrita é um semicone cujo eixo se encontra no eixo  $z$  (STEWART, 2017b). Esses casos são exemplificados na Figura 4.23.

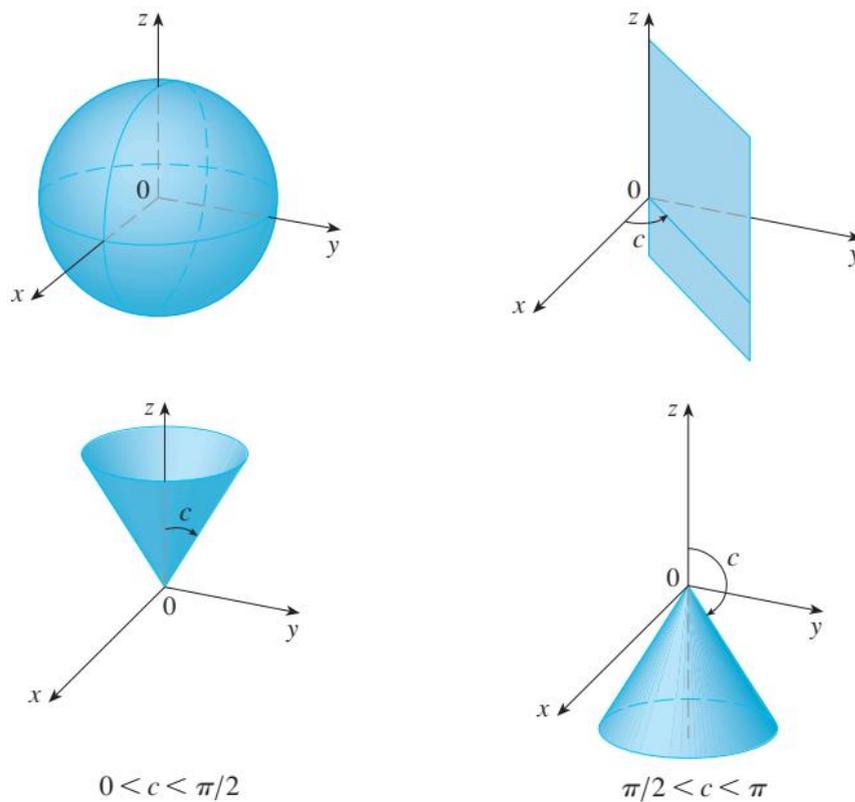


Figura 4.23 - Regiões simplificadas das coordenadas esféricas

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 927).

Agora, é preciso determinar como coordenadas retangulares são representadas na forma de coordenadas esféricas. Para isso, a Figura 4.24 apresenta informações úteis para essa mudança.

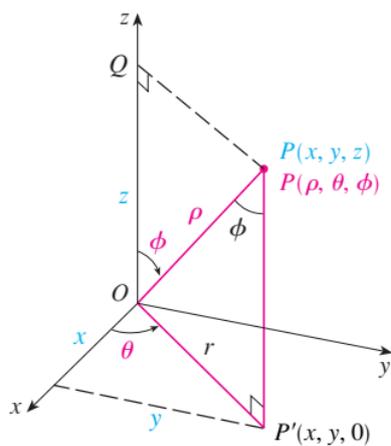


Figura 4.24 - Relações entre coordenadas retangulares e esféricas

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 927).

Pela análise dos triângulos  $OPQ$  e  $OPP'$ , da trigonometria, encontra-se que  $z = \rho \cos \phi$  e  $r = \rho \sin \phi$ . No entanto tem-se que  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Então, para converter coordenadas esféricas para coordenadas retangulares, faz-se o uso das seguintes equações:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi \quad (44)$$

Além disso, convém destacar que:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (45)$$

### Cálculo de integrais em coordenadas esféricas

Quando se trabalha com o sistema de coordenadas esféricas, o elemento geométrico correspondente à caixa retangular é a cunha esférica, como mostra a Figura 4.25.

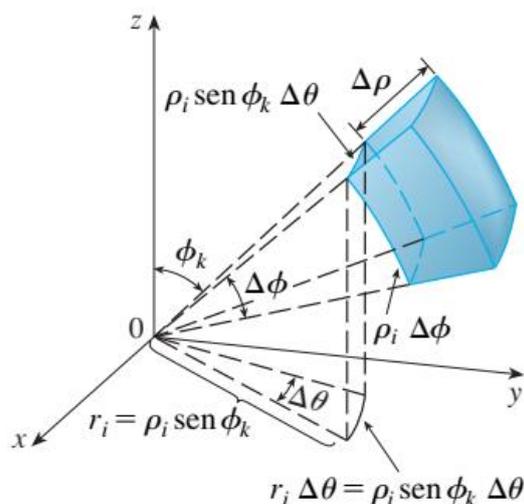


Figura 4.25 - Cunha esférica usada no cálculo de integrais triplas em coordenadas esféricas

Fonte: Adaptada de Stewart (2017b, p. 928).

Essa cunha é definida como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

onde  $a \geq 0$ ,  $\beta - \alpha \leq 2\pi$  e  $d - c \leq \pi$ . Mesmo que anteriormente as integrais triplas tenham sido avaliadas em regiões divididas em pequenas caixas, Stewart (2017b) relata que não há problemas em usar cunhas para tal tarefa.

Dividindo, então, a região  $E$  em pequenas cunhas esféricas  $E_{ijk}$ , com pequenas esferas igualmente espaçadas  $\rho = \rho_i$ , semiplanos  $\theta = \theta_j$  e semicones  $\phi = \phi_k$ , o resultado que se tem é aquele evidenciado na Figura 4.25, uma caixa quase retangular cujas dimensões são  $\Delta\rho$ ,  $\rho_i\Delta\phi$  e  $\rho_i\text{sen}\phi_k\Delta\theta$ . Com isso, Stewart (2017b) indica que uma aproximação para o volume desse elemento  $E_{ijk}$  pode ser

$$V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i\Delta\phi)(\rho_i\text{sen}\phi_k\Delta\theta) = \rho_i^2\text{sen}\phi_k\Delta\rho\Delta\phi\Delta\theta \quad (46)$$

Usando o Teorema do Valor Médio, Stewart (2017b) ainda diz que o volume exato do elemento  $E_{ijk}$  é

$$V_{ijk} = \underline{\rho}_i^2\text{sen}\underline{\phi}_k\Delta\rho\Delta\phi\Delta\theta \quad (47)$$

onde  $(\underline{\rho}_i, \underline{\theta}_j, \underline{\phi}_k)$  é um ponto qualquer dentro de  $E_{ijk}$ . Se a coordenada retangular desse ponto for  $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ , então:

$$\int \int_E \int f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \cdot \Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\rho_i \sin \phi_k \cos \theta_j, \rho_i \sin \phi_k \sin \theta_j, \rho_i \cos \phi_k) \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta$$

Como essa soma é uma soma de Riemann para uma função

$$f(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi$$

Então, a fórmula para integração tripla em coordenadas esféricas é:

$$\int \int_E \int f(x, y, z) dV$$

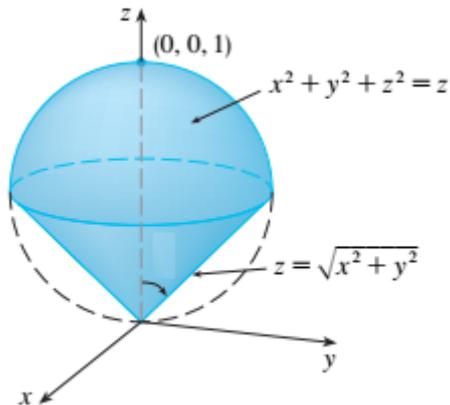
$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \quad (48)$$

## REFLITA

As mudanças de variáveis são muito práticas para trabalhos manuais, tornando o cálculo de algumas integrais um processo consideravelmente mais simples. Computacionalmente, você acha que mudanças de variáveis podem ser úteis, pensando em nível de processamento?

### ATIVIDADE

- 4) Visando a prática de cálculo de integrais triplas em coordenadas modificadas, calcule o volume do sólido delimitado pelo cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ , como evidencia a figura a seguir.



- O volume será igual a  $1/8$ .
- O volume será igual a  $\pi/8$ .
- O volume será igual a  $\pi/4$ .
- O volume será igual a  $1/4$ .
- O volume será igual a  $\pi/2$ .

## INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: Cálculo: Volume 2

Editora: Pearson

Autor: George B. Thomas, Maurice D. Weir e Joel Hass

ISBN: 8581430872

Esse livro de Cálculo contém uma boa quantidade de exemplos e gráficos de funções de duas variáveis, facilitando a compreensão dos assuntos, os quais são abordados em uma linguagem simples e didática. É um excelente material para aprimorar e exercitar os seus conhecimentos.

## CONCLUSÃO DO LIVRO

Ao terminar a leitura e o estudo deste livro de Cálculo Diferencial e Integral II, você certamente ampliou suas bases de conhecimento, as quais serão necessárias para uma vasta gama de outras disciplinas.

Todas as unidades apresentadas no decorrer deste livro são igualmente importantes, mesmo que, sejam, aparentemente, simples. Uma grande dificuldade que os alunos encaram ao estudarem esta disciplina encontra-se nas bases, ou seja, os estudantes apresentam conhecimento parco sobre funções e outros conceitos mais simples do cálculo para **funções** com uma única variável.

Então, este material teve como um esqueleto básico os conteúdos apresentados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I. Com isso, o primeiro assunto a ser apresentado foi o tópico central: as funções com mais de uma variável. Antes de, efetivamente, definirmos os conceitos dessas funções, apresentamos os espaços com  $n$  variáveis, de modo a simplificar a definição de funções especiais. Com os conceitos desenvolvidos, a representação gráfica das funções com duas variáveis foi realizada, de modo que você pôde se familiarizar com a representação típica e simples das funções.

Fundamentados os conceitos das funções, partimos efetivamente para os estudos de cálculo. Começamos com a definição de **limite** para as funções, apresentando esse conceito de uma forma mais intuitiva, inicialmente, para depois apresentá-lo de maneira formal. Com a definição de limite em mãos, partimos para avaliar os casos de indeterminações e continuidade das funções.

Finalizado o estudo do limite para as funções, partimos para o estudo das derivadas. No caso das funções de uma única variável, a derivada de uma função com mais de uma variável surge de um limite recorrente; no entanto, antes de avaliarmos esse limite, escolhemos uma variável da função para poder ser variada, enquanto as demais são mantidas constantes. Assim, ao transformar uma função de várias variáveis em uma função de uma única variável, somos aptos a avaliar a derivada parcial de uma função. No entanto, depender sempre da avaliação de um limite não é muito eficaz; assim, desenvolvemos formas mais práticas de avaliar as derivadas parciais de uma função.

Também foi apresentado o caso das derivadas parciais sucessivas, que são derivadas de ordem superior para funções com mais de uma variável.

Fechando os estudos das derivadas, fomos apresentados às formas de analisar funções com o uso das derivadas. Assim, estudamos como encontrar pontos críticos e, conseqüentemente, pontos de máximo e de mínimo de funções. Esse tipo de análise é extremamente importante, sendo uma das principais aplicações do Cálculo Diferencial e Integral II.

No último tópico, estudamos, naturalmente, as integrais de funções com mais de uma variável. Fomos apresentados às integrais duplas e triplas, assim como a algumas técnicas de modificação das variáveis, visando facilitar a resolução de algumas integrais. Buscando facilitar a compreensão deste tópico, foi realizado um uso intenso de recursos gráficos.

Portanto, agora que fechamos este material, esperamos ter fornecido a você uma boa ampliação das bases desenvolvidas no Cálculo Diferencial e Integral I, apresentando a você, estudante, uma série de novas habilidades. Agradeço a escolha do material e espero que a parte do conhecimento partilhado com você, por meio deste livro, seja aproveitada intensamente, contribuindo para o seu desenvolvimento pessoal e profissional.

## REFERÊNCIAS

- CARDOSO, V. **Buracos negros na terra?** Universidade de Coimbra. Disponível em: <[http://nautilus.fis.uc.pt/gazeta/revistas/29\\_4/vol29\\_4\\_Art01.pdf](http://nautilus.fis.uc.pt/gazeta/revistas/29_4/vol29_4_Art01.pdf)>. Acesso em: 29 abr. 2019.
- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais duplas e triplas.** São Paulo: Makron Books, 2005.
- GRANVILLE, W. A.; SMITH, P. F.; LONGLEY, W. R. **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral.** São Paulo: Âmbito Cultural, 1986.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.
- MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. de O. **Cálculo – funções de uma e várias variáveis.** 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.
- STEWART, J. **Cálculo – Volume 1.** 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017a.
- STEWART, J. **Cálculo – Volume 2.** 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017b.
- THOMAS JÚNIOR, G. B. **Thomas' Calculus.** 13. ed. Harlow: Pearson, 2016.