Álgebra Linear

Renam Luis Acorsi

INFORMAÇÕES SOBRE O AUTOR

Renam Luis Acorsi

- Graduação em Engenharia Química
- Mestre em Engenharia Química na área de Biocatálise e Processos Bioquímicos

Sobre o Autor

Doutorando em Engenharia Química pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Estadual de Maringá (PEQ-UEM), na linha de pesquisa Biocatálise e Processos Bioquímicos, com previsão de conclusão em 2019. Mestre em Engenharia Química pelo PEQ-UEM, na linha de pesquisa Biocatálise e Processos Bioquímicos, concluído em 2012.

Graduado em Engenharia Química pela UEM, graduação concluída em 2010. Foi Professor Assistente T40 no Departamento de Engenharia Química da Universidade Estadual de Maringá (DEQ-UEM), ministrando aulas para os cursos de Engenharia Química, Engenharia de Produção, Engenharia Elétrica, Bioquímica e Tecnologia em Biotecnologia.

INTRODUÇÃO DO LIVRO

Caro(a) aluno(a), sabemos que os alunos que ingressam no ensino superior em cursos das áreas de exatas e tecnológicas sempre lidam com uma vasta gama de disciplinas básicas em comum. E quer seja um estudante de Engenharias, da Matemática, da Física ou da Química, todos eles devem lidar com as disciplinas de Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear em seus primeiros anos no ensino superior. E estas disciplinas básicas estão ligadas a um efeito geralmente complexo: elas são responsáveis por causar medo em diversos estudantes, principalmente por serem consideradas de uma teoria pesada, com tópicos consideravelmente mais complexos e com uma alta exigência de abstração, por parte do estudante, para compreendê-las.

Logo, esse medo que acompanha o simples nome destas disciplinas mostra-se como um grande impedimento de seu ensino. Muitos alunos simplesmente colocam na cabeça que não conseguirão aprender uma certa disciplina porque ela é demasiado complexa. Isso acaba por dificultar muito o andamento do curso superior escolhido pelo estudante, pois as disciplinas básicas servem como alicerce para, praticamente, todas as demais disciplinas que serão trabalhadas no decorrer do curso.

Além disso, a Álgebra Linear é uma disciplina geralmente trabalhada de forma rápida, quando comparada às outras disciplinas, geralmente sendo cursada em apenas um semestre. Logo, ela acaba apresentando um altíssimo volume de informações a ser digerido e compreendido pelo estudante.

Com esse pensamento em mente, busquei escrever um material com uma linguagem mais simples possível, e adicionando, sempre que possível, exemplos práticos dos tópicos abordados, visando melhorar a fixação dos conceitos trabalhados. Então, o que o aluno deve esperar deste material?

A Álgebra Linear é uma disciplina que gira em torno de vetores e, consequentemente, matrizes. Vetores certamente é um termo com o qual você já está familiarizado, sendo algo de uso muito comum na disciplina de Física. No entanto, Álgebra Linear deve tratar este assunto de uma forma não exclusivamente ligada à Física, até porque, conforme veremos no desenvolvimento deste livro, os vetores não se resumem a “flechas indicando a direção e sentido de uma força/velocidade/aceleração”.

A álgebra vetorial deriva da álgebra matricial. Logo, o primeiro passo a ser desenvolvido neste material é a parte conceitual-teórico sobre matrizes. Iremos definir o que é uma matriz, quais tipos de matrizes encontraremos, como procedemos nas operações envolvendo matrizes e como encontramos algumas características das matrizes, como sua inversa e seu determinante.

Em seguida, lidamos com uma das mais básicas utilidades das matrizes: os sistemas lineares. Um sistema linear nada mais é do que um conjunto de equações lineares com mais de uma variável, que devem ser resolvidas simultaneamente. Iremos analisar como podemos fazer uso da teoria que desenvolvemos sobre matrizes, para encontrarmos uma solução para este tipo de problema.

Com essa base bem desenvolvida, iremos definitivamente entrar no mundo dos vetores. Vamos deixar este termo bem definido, descrevendo como podemos agrupá-los e como é possível que um pequeno conjunto de vetores possa gerar uma infinidade de novos vetores, através do estudo de espaços vetoriais e combinação linear.

Fechando o material, iremos combinar os conceitos de vetores, matrizes e funções e desenvolveremos os conceitos de transformações lineares, ou seja, estudaremos como uma matriz pode ser usada para transformar um vetor de uma determinada dimensão em outro vetor possivelmente de outra dimensão. Além disso, veremos também, sobre autovalores e autovetores, que nos auxiliam em lidar com uma vasta gama de tipos de problemas.

Finalizando, é importante que você tenha em mente que a Álgebra Linear é uma disciplina que exige muita prática para maximizar o aprendizado. Então, você deve buscar realizar o máximo de exercícios possível sobre os temas estudados, expandindo sempre sua fonte de conhecimentos.

Espero que seja possível aproveitar ao máximo este material, contribuindo para seu crescimento pessoal e profissional!

UNIDADE I

Matrizes

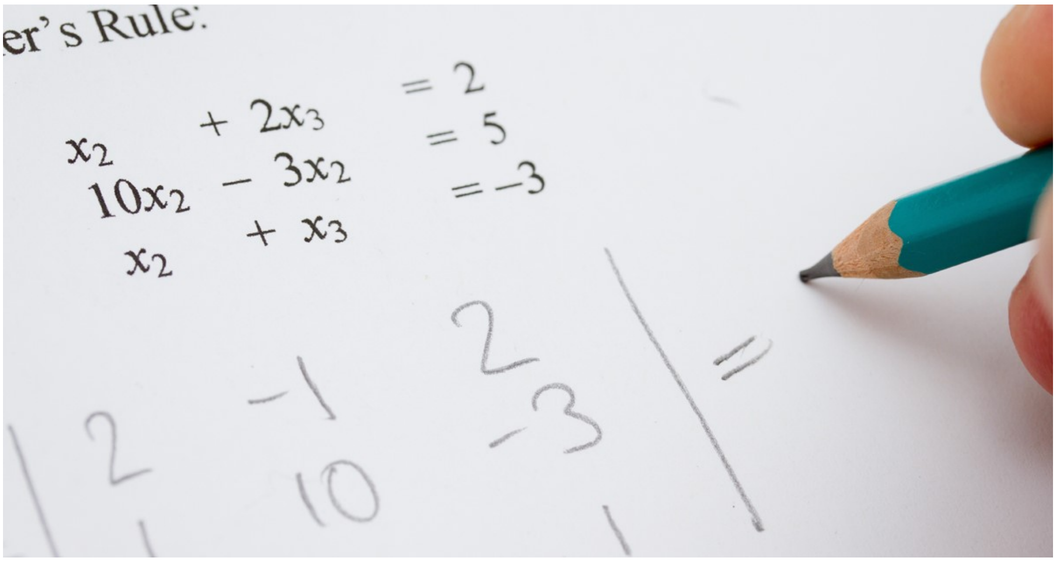
Renam Luis Acorsi

Introdução

Na presente unidade iremos discutir sobre uma unidade fundamental da álgebra: as **matrizes**. Veremos que as matrizes tem um arranjo retangular semelhante àquele que vemos nas tabelas, mas, ao contrário destas, podemos utilizar as matrizes para diferentes operações, cada uma delas com suas próprias características e propriedades.

Logo, vamos iniciar esta unidade definindo o que são exatamente as matrizes e então, analisaremos brevemente os tipos mais comuns de matrizes com as quais iremos lidar. Tendo essa parte conceitual sido bem definida, partiremos para a análise das operações que podemos fazer utilizando as matrizes, como a adição, e a multiplicação por escalar.

Finalizando esta unidade, iremos apresentar algumas noções de determinantes, que será útil futuramente nesta disciplina.



Fonte: Bradford Calkins / 123 RF.

1. Introdução

Na presente unidade iremos discutir os conceitos básicos de matrizes. As matrizes se mostrarão úteis em diversos problemas: podemos usar matrizes para ordenar e simplificar problemas, o que facilita a compreensão destes, e também, ao fazer uso das matrizes, teremos em mãos diferentes métodos de resolução de problemas.

Uma forma simples de você visualizar uma matriz, conforme nos diz Boldrini et al. (1980), é como uma tabela, onde temos elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, considere que você tenha em mãos uma tabela contendo dados de altura, peso e idade de três pessoas diferentes, como a Tabela 1.1.

	Altura (m)	Peso (kg)	Idade ($anos$)
Indivíduo 1	1,66	88	35
Indivíduo 2	1,51	52	28
Indivíduo 3	1,78	84	22

Tabela 1.1 - Dados físicos de três indivíduos

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se reescrevermos os dados desta tabela, abstraindo o significado das linhas e colunas, teremos uma matriz na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1,66 & 88 & 35 \\ 1,58 & 52 & 28 \\ 1,78 & 84 & 22 \end{bmatrix}$$

Ou seja, como resume Leon (1999), uma *matriz* nada mais é do que um arranjo retangular de números em m linhas e n colunas, a qual representaremos, a partir deste ponto por uma letra maiúscula, podendo também acrescentar o subscrito $m \times n$ à direita. Esse subscrito é lido como "m por n". Por exemplo, podemos chamar a matriz que obtivemos da Tabela 1.1 de T ou $\boldsymbol{T_{3\times 3}}$, pois ela apresenta 3 linhas e 3 colunas:

$$T_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1{,}66 & 88 & 35 \\ 1{,}58 & 52 & 28 \\ 1{,}78 & 84 & 22 \end{bmatrix}$$

Note que, até o momento, fizemos o uso de colchetes para delimitar uma matriz. No entanto, em diferentes materiais, você poderá encontrar outros símbolos com tal finalidade, como os parênteses ou duas barras:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$$

Para facilitar a compreensão, este material sempre usará colchetes para o fim de delimitar matrizes (BOLDRINI et al., 1980).

Como não existe limite para o número de elementos dentro de uma matriz, é melhor que tenhamos uma forma simplificada para designarmos cada um dos termos da matriz. Para isso, conforme Boldrini et al. (1980) indica, iremos usar a mesma letra usada para designar a matriz, mas na versão minúscula, e com índice duplo i e j, sendo que o i indica a i-ésima linha e j a j-ésima coluna, onde o elemento se encontra. Note que, como Lima (2000) destaca, $1 < i < m$ e $1 < j < n$.

Partindo dessa definição, para a matriz gerada a partir da Tabela 1.1, usaremos a notação t_{ij} para identificar os elementos da matriz. Logo, temos que t_{11} remete ao elemento situado na linha 1 e coluna 1 da matriz $T_{3\times 3}$, ou seja, $t_{11} = 1{,}66$; t_{32} remete ao elemento situado na linha 3 e coluna 2 da matriz $T_{3\times 3}$, ou seja, $t_{32} = 84$.

Com o que foi dito até o momento, podemos agora apresentar uma notação para uma matriz genérica de qualquer tamanho:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m3} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

E também podemos citar uma definição mais formal do que é uma matriz:

Definição 1: Uma ***matriz*** é um arranjo retangular de números, que são chamados de *entradas* ou *elementos*. O ***tamanho*** de uma matriz é uma descrição da quantidade de linhas m e colunas n que ela apresenta (POOLE, 2004).

No presente material, iremos considerar que os elementos que compõem a matriz são **números reais**. Agora que definimos o que é uma matriz e determinamos uma forma simples de identificar cada elemento desta matriz, podemos desenvolver nosso trabalho com elas.

REFLITA

O manuseio de matrizes é indispensável para inúmeros profissionais na atual década. Áreas, como a genética, análises econômicas e desenvolvimento de inúmeras tecnologias precisam lidar com matrizes, geralmente de tamanhos imensos, o que faz com que a tecnologia computacional simples, que temos disponível atualmente, não seja suficiente para as análises requeridas de forma direta. Sabendo disso, você seria capaz de pensar em como lidar em tais situações?

1.1 Tipos de Matrizes

Durante o uso de matrizes na resolução de problemas, você certamente irá se deparar com alguns tipos de matrizes que apresentam características comuns. Agora iremos discutir essas matrizes especiais.

Primeiramente, iremos definir a igualdade entre matrizes. Sejam duas matrizes, $A_{m\times n}$ e $B_{r\times s}$. De acordo com Boldrini et al. (1980) e Poole (2004), essas duas matrizes serão iguais se, e somente se, elas possuírem o mesmo número de linhas, o mesmo número de colunas e, se cada elemento correspondente for igual. Ou seja, para essas duas matrizes serem iguais, é necessário que $m = r$, $n = s$ e $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo 1.1: Verifique se as matrizes dadas a seguir são iguais:

a) $A = \begin{bmatrix} 2^2 & 3 & \log 1 \\ \cos\pi/2 & 5^2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt[3]{27} & 0 \\ \log 1 & 25 & sen\,\pi \end{bmatrix}$

b) $C = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ sen\,\pi/2 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

c) $E = \begin{bmatrix} sen\,\pi/2 & 1 \\ 2^3 & \cos\pi \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1 & \cos 0 \\ 6 & \cos\pi \end{bmatrix}$

Solução

a) Para avaliarmos a igualdade das matrizes, precisamos analisar os três pontos indicados. Primeiramente, devemos comparar quantas linhas A e B possuem: como ambas as matrizes apresentam duas linhas, passamos para a comparação do número de colunas. Facilmente identificamos que tanto A quanto B apresentam três colunas. Como os números de linhas e colunas são iguais nas duas matrizes, devemos, finalmente, realizar uma avaliação termo a termo das duas matrizes:

i. $a_{11} = 2^2 = 4$; $b_{11} = 4$; logo, $a_{11} = b_{11}$.

ii. $a_{21} = cos\,\pi/2 = 0$; $b_{21} = log\,1 = 0$; logo, $a_{21} = b_{21}$.

iii. $a_{12} = 3$; $b_{12} = \sqrt[3]{27} = 3$; logo, $a_{12} = b_{12}$.

iv. $a_{22} = 5^2 = 25$; $b_{22} = 5$; logo, $a_{22} = b_{22}$.

v. $a_{13} = log\,1 = 0$; $b_{13} = 0$; logo, $a_{13} = b_{13}$.

vi. $a_{23} = 0$; $b_{23} = sen\,\pi$; logo, $a_{23} = b_{23}$.

Verificamos que cada um dos termos é igual, ou seja, $a_{ij} = b_{ij}$. Então, podemos concluir agora que $A = B$.

b) Seguimos os mesmos passos realizados em a). Então, comparemos quantas linhas C e D possuem: ambas as matrizes apresentam três linhas. Agora, verifiquemos o número de colunas: identificamos que C apresenta duas colunas, enquanto D apresenta três colunas. Como os números de colunas não são iguais nas duas matrizes, não é preciso analisar os termos das matrizes: já podemos afirmar que $C \neq D$.

c) Seguimos os mesmos passos realizados em a). Comparando quantas linhas E e F possuem: ambas as matrizes apresentam duas linhas. Em seguida, identificamos que tanto E quanto F apresentam duas colunas. Como os números de linhas e colunas são iguais nas duas matrizes, devemos, finalmente, realizar uma avaliação termo a termo das duas matrizes:

i. $e_{11} = sen\,\pi/2 = 1$; $f_{11} = 1$; logo, $e_{11} = f_{11}$.

ii. $e_{21} = 2^3 = 8$; $f_{21} = 6$; logo, $e_{21} \neq f_{21}$.

iii. $e_{12} = 1$; $f_{12} = cos\,0 = 1$; logo, $e_{21} = f_{21}$.

iv. $e_{22} = cos\,\pi = -1$; $f_{22} = cos\,\pi = -1$; logo, $e_{22} = f_{22}$.

Verificamos que nem todos os termos são iguais, ou seja, $e_{ij} \neq f_{ij}$. Então, podemos concluir agora que $E \neq F$.

Além das matrizes iguais, Boldrini et al. (1980) e Poole (2004) ainda mencionam a existência de dez tipos especiais de matrizes com o qual você irá se deparar com uma boa frequência em seus estudos. Estas matrizes especiais serão discutidas a seguir.

O primeiro tipo de matriz especial consiste naquelas matrizes onde temos que *o número de linhas é igual ao número de colunas*, ou seja, matrizes onde $m = n$. As matrizes com essa característica são chamadas de **matrizes quadradas**. Abaixo são mostrados alguns exemplos de matrizes quadradas.

$$A = [7] \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Geralmente, dizemos que uma matriz quadrada de ordem m é aquela que apresenta m colunas e m linhas. Logo, uma matriz de ordem 2 nada mais é do que uma matriz 2×2.

Kolman (1999) nos mostra que os elementos a_{ij} para $i = j$ compõem a **diagonal principal** da matriz. Por exemplo, numa matriz A de ordem 2, os elementos a_{11} e a_{22}

são a diagonal desta matriz. Já numa matriz B de ordem 5, os elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} e a_{55} serão a diagonal de B.

O segundo tipo de matriz que comumente aparece é aquela onde todos os elementos são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo i e j. Essas matrizes são chamadas de **matrizes nulas**. Abaixo são mostrados alguns exemplos de matrizes nulas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alguns autores, como Boldrini (1980) e Poole (2004), costumam denotar uma matriz nula por 0 ou $0_{m \times n}$. Sinta-se livre para usar essa notação, apenas tome o cuidado de não se confundir com o tamanho da matriz nula com a qual você está trabalhando.

O terceiro tipo especial de matriz é aquele onde temos uma única coluna, ou seja, são matrizes onde se tem que $n = 1$. Essas matrizes são chamadas de **matrizes coluna**, com alguns exemplos apresentados abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

De modo semelhante, quando temos matrizes onde $m = 1$, ou seja, matrizes que consistem de uma única linha, temos uma **matriz linha**. Este é o quarto tipo especial de matriz.

$$A = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Lipschutz (1994) indica uma nomenclatura diferenciada para as matrizes coluna e matrizes linha: esses tipos de matrizes também podem ser encontradas na literatura como *vetor coluna* e *vetor linha*, respectivamente.

O quinto tipo de matriz especial que você deve conhecer é a **matriz diagonal**. Esse tipo de matriz é sempre uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$. Simplificando, uma matriz diagonal é aquela onde todos os elementos que não se encontram na “diagonal” são nulos. A seguir são mostrados alguns exemplos de matrizes diagonais.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Um caso especial de matriz diagonal destacado pr Boldrini (1980) é aquele onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, ou seja, onde $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0\ j \neq i$. Uma matriz deste tipo é dita **matriz identidade quadrada**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outro caso especial que temos de uma matriz diagonal, destacado por Kolman (1999) e Poole (2004) é quando todos os elementos da diagonal principal são iguais a uma constante c, isto é, uma matriz onde $a_{ii} = c$ e $a_{ij} = 0$ para $j \neq i$. Uma matriz que se encaixa nesta definição é chamada de **matriz escalar**.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

O oitavo e o nono tipo de matriz especial são parecidos entre si: são matrizes quadradas onde todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos. Numa **matriz triangular superior**, todos os elementos *abaixo* da diagonal principal são nulos, ou seja, quando $i > j$, $a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que podem existir elementos nulos acima da diagonal principal. O que não ocorre neste tipo de matriz é ter todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal como nulos. Já numa **matriz triangular inferior**, todos os elementos *acima* da diagonal principal são nulos, ou seja, quando $i < j$, $a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} b & 0 \\ a & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

De forma semelhante ao que foi dito para uma matriz triangular superior, não há necessidade de todos os elementos abaixo da diagonal principal serem não-nulos numa matriz triangular inferior. Para que a matriz seja classificada neste tipo, basta que todos os elementos acima da diagonal principal sejam nulos e que haja, ao menos, um elemento que não seja nulo abaixo da diagonal principal.

Finalmente, o último tipo especial de matriz que você deve encontrar em seus estudos são as **matrizes simétricas**. Este tipo de matriz é aquela matriz quadrada onde o elemento $a_{ij} = a_{ji}$, ou seja, a parte inferior desse tipo de matriz é uma reflexão da parte superior em relação à diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ATIVIDADE

1) Visando fixar melhor os tipos de matrizes que você usará durante os estudos de álgebra, analise as alternativas abaixo e assinale aquela que se encontra correta.
   a) A matriz *A* abaixo é uma matriz diagonal porque apresenta todos os elementos da diagonal principal com o mesmo valor.
   b) Uma matriz diagonal também é uma matriz simétrica.
   c) Uma matriz triangular superior é uma matriz onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.
   d) A matriz *A* abaixo pode ser considerada uma matriz triangular inferior.
   e) A matriz *A* abaixo não pode ser considerada uma matriz triangular superior porque apresenta um elemento nulo acima da diagonal principal.

2. Operações Básicas de Matrizes e suas Propriedades

Tendo você se familiarizado com matrizes, devemos agora definir como iremos trabalhar com elas. Ou seja, devemos definir e formalizar agora como realizamos operações com matrizes, de modo a encontrar novas matrizes a partir de matrizes conhecidas.

2.1 Adição de Matrizes

A primeira operação que discutiremos primeiramente é a **adição de matrizes**. Nessa operação, partiremos de, no mínimo, duas matrizes diferentes para encontrar uma nova matriz. A adição de matrizes é semelhante à adição de números reais.

Definição 2 – Adição de matrizes: Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a adição destas matrizes, denotada por $A + B$, será a matriz C, cujos elementos c_{ij} serão iguais à soma dos elementos correspondentes, ou seja, $a_{ij} + b_{ij}$ (KOLMAN, 1999).

Exemplo 2.1: Sendo as matrizes A e B dadas abaixo, calcule a matriz $C = A + B$, se possível.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução

Antes de efetuarmos a soma, devemos verificar os tamanhos das matrizes. Neste caso, tanto A quanto B são matrizes 3×2. Para encontrarmos a matriz C, então, basta que somemos os elementos correspondentes das duas matrizes dadas:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 & 6 + (-3) \\ 3 + (-2) & 4 + 1 \\ 5 + 1 & 2 + (-1) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.2 - Sendo as matrizes A, B e C dadas abaixo, calcule as somas $A + B$, $A + C$ e $B + C$, se possível.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução

Antes de efetuarmos qualquer operação de adição de matrizes, devemos verificar os tamanhos das matrizes que serão usadas na operação. Neste exemplo, tanto A quanto B são matrizes 2×3, mas C é uma matriz 2×2. Com essa informação, já sabemos que não é possível calcularmos $A + C$ nem $B + C$.

Efetuaremos, então, a única adição possível das requisitadas:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

A Definição 2 nos diz apenas da adição de duas matrizes, mas ela é facilmente expansível para inúmeras matrizes a serem adicionadas. Também é importante notar que, por essa definição, só podemos somar matrizes do mesmo tamanho. Boldrini (1980) também destaca que a adição de matrizes também irá apresentar as mesmas propriedades da operação adição, realizada entre números reais.

Para averiguarmos essas propriedades da adição de números reais e já as aplicarmos à adição de matrizes, consideremos três matrizes, A, B e C, sendo essas três matrizes de um mesmo tamanho $m \times n$. Elas estarão sujeitas às seguintes três propriedades, de acordo com Boldrini (1980):

I. ***Comutatividade***: a propriedade da comutatividade da soma nos diz que a ordem que realizamos a adição não altera o resultado final, ou seja:

$$A + B = B + A$$

II. ***Associatividade:*** a propriedade da associatividade da soma nos diz que independentemente da forma que realizarmos a soma de parcelas, o resultado será o mesmo, ou seja:

$$A + (B + C) = (A + B) + C = (A + C) + B$$

III. ***Elemento neutro:*** a propriedade do elemento neutro nos diz que existe uma matriz nula 0 de tamanho $m \times n$ que pode ser somada a uma matriz sem alterar seus elementos, ou seja:

$$A + 0 = A$$

$$B + 0 = B$$

$$C + 0 = C$$

2.2 Multiplicação por Escalar

A segunda operação a ser vista é a multiplicação de uma matriz por um número, chamada de **multiplicação por escalar**. Neste material, iremos nos ater à multiplicação por um escalar real, mas saiba que esta operação também contempla a multiplicação de matrizes por números complexos (BOLDRINI, 1980).

Definição 3 – Multiplicação por escalar: Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$, e k um número real, então o produto escalar $k \cdot A$, também chamado de kA, será uma matriz B de ordem $m \times n$ onde cada elemento é igual ao produto de k por cada um dos elementos de A, ou seja, é igual a $[ka_{ij}]$ (POOLE, 2004).

Exemplo 2.3 - Sejam as matrizes A, B e C dadas abaixo e os escalares $k = 2$ e $c = -1$. Calcule kA, cB, cC e $kA + cA$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução

As primeiras três matrizes que nos é pedida para calcular são simples aplicação da multiplicação por escalar. Vejamos:

$$kA = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 3 & 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$cB = \begin{bmatrix} -1\cdot 0 & -1\cdot 3 \\ -1\cdot 2 & -1\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$cC = \begin{bmatrix} -1\cdot 0 & -1\cdot 2 & -1\cdot 6 \\ -1\cdot 1 & -1\cdot 2 & -1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora vamos combinar a multiplicação por escalar com a adição e calcular a última matriz desejada:

$$kA + cA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1\cdot 1 & -1\cdot 2 & -1\cdot 1 \\ -1\cdot 4 & -1\cdot 3 & -1\cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 4+(-2) & 2+(-1) \\ 8+(-4) & 6+(-3) & 6+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

O Exemplo 2.3 nos traz um caso interessante no final. Note que, efetivamente, calculamos $kA - A$. Isto é, a subtração de matrizes pode ser realizada combinando as operações de adição e multiplicação por escalar, usando o escalar -1 para tal. Assim, sendo as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, a subtração de matrizes $A - B$ pode ser escrita como $A + (-1)\cdot B$. Lipschutz (1994), com essa definição da subtração de matrizes, adiciona uma outra propriedade à adição de matrizes:

IV. ***Elemento inverso:*** a propriedade do elemento inverso na adição de matrizes nos diz que, para qualquer matriz A de tamanho $m \times n$ existe uma matriz $B = (-1)\cdot A$ também de tamanho $m \times n$ para a qual a soma $A + B$ será uma matriz nula:

$$A + B = A - A = 0$$

A operação de multiplicação por escalar de matrizes também apresenta uma série de propriedades. De acordo com Boldrini (1980), a operação de multiplicação por escalar está sujeita às seguintes propriedades listadas abaixo. Sejam A e B matrizes de mesmo tamanho $m \times n$ e k, k_1 e k_2 números reais:

I. ***Distributividade em relação à matrizes:*** a multiplicação por escalar de uma soma de matrizes é igual à soma das matrizes multiplicadas pelo escalar:

$$k(A + B) = kA + kB$$

II. ***Distributividade em relação ao escalar:*** a multiplicação de uma matriz pela soma de dois números reais é igual à soma das multiplicações pelos escalares:

$$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$$

III. ***Associatividade:*** a multiplicação por escalar de uma matriz que já é obtida pela multiplicação de um escalar é igual à multiplicação da matriz pela multiplicação dos reais:

$$(k_1) \cdot k_2A = (k_1 \cdot k_2)A$$

IV. ***Elemento nulo:*** a propriedade do elemento neutro nos diz que existe o número 0 que pode ser multiplicado a uma matriz, resultando numa matriz nula:

$$0 \cdot A = 0$$

$$0 \cdot B = 0$$

2.3 TRANSPOSIÇÃO

Existirão diversos casos em que você precisará considerar os elementos das linhas de uma matriz como sendo os elementos das colunas da matriz. Essa é a terceira operação que veremos em nosso estudo, chamada de **Transposição de matrizes** (BOLDRINI, 1980).

Definição 4 – Transposição: seja a matriz $A = [a_{ij}]$ uma matriz de tamanho $m \times n$. Podemos obter uma nova matriz a partir desta, onde as linhas são as colunas de A, sendo esta nova matriz, a matriz transposta de A, representada por A' ou A^T (KOLMAN, 1999).

Segundo essa definição, temos que a matriz A^T será composta por elementos $a_{ij}^T = a_{ji}$ (BOLDRINI, 1980). O Exemplo 2.4 tornará mais clara essa definição.

Exemplo 2.4 - Sejam as matrizes A, B e C dadas abaixo. Obtenha as matrizes transpostas de cada uma delas.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução

Para obtermos a transposta de uma matriz, devemos substituir as linhas pelas colunas. Assim, tomando primeiramente a matriz A, que possui apenas uma linha, em sua transposta teremos apenas uma coluna, pois a única linha desta matriz será a coluna na transposta:

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Repetindo o processo para a matriz B, tornando cada uma de suas três linhas em colunas, encontramos:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para a matriz C:

$$C^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A operação de transposição de matrizes também apresenta uma série de propriedades que você deve conhecer. Boldrini (1980) lista as seguintes propriedades para a transposição:

I. Uma matriz será chamada de **simétrica** se, e somente se, ela for igual à sua transposta:

$$A = A^T$$

II. A transposta de uma matriz transposta é igual à matriz original:

$$A^{TT} = A$$

III. A transposta de uma soma de matrizes é igual à soma de suas respectivas transpostas:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

IV. Uma matriz multiplicada por escalar e transposta é igual à multiplicação por escalar da matriz transposta originalmente:

$$(kA)^T = kA^T$$

ATIVIDADE

2) Sejam as seguintes matrizes dadas abaixo. Nas alternativas a seguir são mostrados os resultados de algumas operações. Avalie tais resultados e assinale a alternativa correta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $A + B$ é uma operação possível e é igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $B - 2D$ é uma operação possível e é igual a

$$\begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -2 & 8 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $C + D^T$ é uma operação possível e é igual a

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

d) $3A^T - C^T$ é uma operação possível e é igual a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e) $2B^T + 2D^T$ é uma operação possível e é igual a:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 12 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Multiplicação de Matrizes

Agora que vimos as operações mais básicas utilizando matrizes, chegou o momento de lidarmos com uma outra operação, ligeiramente mais complexa, mas indispensável para lidarmos com matrizes: a **multiplicação de matrizes**.

Diferentemente do que vimos até o momento, essa operação não é tão intuitiva quanto a adição ou multiplicação por escalar, apresentando algumas propriedades diferentes destas operações também (KOLMAN, 1999).

Talvez, a principal diferença dessa operação, conforme nos diz Poole (2004), seja o fato de que ela não é realizada simplesmente elemento por elemento, como as vistas anteriormente, apesar de ser possível uma definição desta operação para tal condição. Tal definição, elemento a elemento, no entanto, acaba sendo inviável pela pouca aplicabilidade.

Para tentarmos compreender melhor como é feita esta operação, façamos um exemplo prático aqui, tal qual proposto por Boldrini (1980). Suponha que você tenha em mãos a tabela nutricional de dois alimentos, indicando a composição de fibras, vitamina C e de cálcio para uma certa unidade de consumo destes alimentos, como nos mostra a Tabela 1.2, a seguir.

	Fibra (g)	Vitamina C (mg)	Cálcio (mg)
Alface	2	0	28
Tomate	1	22	7

Tabela 1.2 - Tabela nutricional de alimentos

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se consumirmos 2 unidades de alface e 1 unidade de tomate, quanto iremos ingerir de cada componente da tabela acima? Para tal, basta que resolvamos a seguinte conta:

$$Fibras = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 + 1 = 5\ g$$

$$Vitamina\ C = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 22 = 0 + 22 = 22\ mg$$

$$Cálcio = 2 \cdot 28 + 1 \cdot 7 = 56 + 7 = 63\ mg$$

Resolvemos o problema dado de uma forma manual. Mas, como já sabemos, podemos transformar qualquer tabela em uma matriz. Assim, podemos fazer com que a tabela seja representada pela seguinte matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 28 \\ 1 & 22 & 7 \end{bmatrix}$$

As quantidades de consumo também podem ser representadas na forma matricial com a matriz linha B:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, o total de componentes ingeridos também pode ser representado na forma matricial como a matriz C:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 22 & 63 \end{bmatrix}$$

O cálculo manual que realizamos anteriormente é o que chamamos efetivamente de **multiplicação de matrizes**, ou seja, temos que o produto $A \cdot B$ será igual a C, ou seja:

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 28 \\ 1 & 22 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 22 \cdot 1 & 28 \cdot 2 + 7 \cdot 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 22 & 63 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora, suponha você deseja substituir esses componentes nutricionais por uma pílula manipulada. Ao ir até um centro de manipulação, você é informado que os custos dessas vitaminas são R$ 5 para cada g de fibra, R$ 0,10 para cada mg de vitamina C e R$ 0,20 para cada mg de cálcio. Assim, o preço de uma pílula que contenha todos esses componentes será:

$$Preço = 5 \cdot 5 + 22 \cdot 0{,}10 + 63 \cdot 0{,}20 = 25 + 2{,}20 + 12{,}60 = R\$\ 39{,}80$$

Essa operação também pode ser transcrita para a forma de matrizes. Os custos dos componentes pode ser transformado na matriz D:

$$D = \begin{bmatrix} 5 \\ 0{,}10 \\ 0{,}20 \end{bmatrix}$$

E o preço da pílula também pode ser obtido por uma multiplicação matricial, ou seja, $C \cdot D$:

$$\begin{aligned} C \cdot D &= \begin{bmatrix} 5 & 22 & 63 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0{,}10 \\ 0{,}20 \end{bmatrix} \\ &= [5 \cdot 5 + 22 \cdot 0{,}10 + 63 \cdot 0{,}20] \\ &= [39{,}80] \end{aligned}$$

Note que os “produtos” que encontramos nas multiplicações não são simplesmente a multiplicação dos elementos das matrizes. O resultado destes “produtos” é obtido utilizando os elementos da coluna de uma das matrizes e os elementos da linha da outra matriz.

Boldrini (1980) explicita que, com isso, podemos encontrar uma relação dos tamanhos das matrizes com essa operação. Veja:

$$B_{1\times2} \cdot A_{2\times3} = C_{1\times3}$$

$$C_{1\times3} \cdot D_{3\times1} = E_{1\times1}$$

Na primeira operação, temos o produto de uma matriz 2×3 por uma matriz 1×2. O número de linhas de A é o mesmo número de colunas de B. Já a matriz C, que resulta dessa multiplicação, possui o mesmo número de linhas que B e o mesmo número de colunas de A. Na segunda operação, temos o mesmo esquema: a matriz D possui 3 linhas, que é o mesmo número de colunas apresentado por C, e uma coluna, que é o mesmo número de linhas da matriz C. A matriz E, resultado desta multiplicação, apresenta uma linha e uma coluna, ou seja, o mesmo número de linhas de C e o mesmo número de colunas de D.

Assim, acabamos de mostrar como funciona a multiplicação de matrizes envolvendo uma matriz linha e uma matriz coluna. Partindo do que vimos até o momento, podemos partir, então, para uma definição geral da multiplicação de matrizes.

Definição 5 – Multiplicação de matrizes: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de tamanho $m \times n$ e $B = [b_{ij}]$ uma matriz de tamanho $n \times r$. De acordo com Poole (2004), podemos obter uma nova matriz $C = [c_{ij}]$ a partir destas matrizes, realizando a multiplicação $A \cdot B$, sendo o tamanho de C igual a $m \times r$. Cada elemento da nova matriz será igual a:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Note que, diferente da adição, as matrizes A e B não precisam ser do mesmo tamanho. Basta que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times r} = C_{m \times r}$$

Igual

Tamanho de C

Essa forma como calculamos o produto de duas matrizes nos diz que o elemento i, j-ésimo de C é simplesmente o **produto escalar** da i-ésima linha de A com a j-ésima coluna de B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & c_{n2} & \cdots & c_{mr} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.5: Sejam as matrizes A e B. Encontre a matriz $C = A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

Para avaliarmos uma multiplicação de matrizes, primeiramente devemos checar o tamanho das matrizes. A é uma matriz de tamanho 2×3 e B é uma matriz de tamanho 3×2. Como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, essa multiplicação é possível e sabemos que a matriz resultante dessa multiplicação será do tamanho 2×2, ou seja, o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B. Agora, basta efetuarmos a operação desejada:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.6 - Sejam as matrizes A e B. Encontre a matriz $C = A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Solução

Verifiquemos o tamanho das matrizes. A é uma matriz de tamanho 2×2 e B é uma matriz de tamanho 2×4. Como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, essa multiplicação é possível e sabemos que a matriz resultante dessa multiplicação será do tamanho 2×4, ou seja, o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B. Agora, efetuando a operação desejada:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 6 \\ (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 5 & (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 0 & (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 6 & 3 & 17 \\ 3 & -2 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Essa operação de multiplicação de matrizes apresenta algumas propriedades. De acordo com Boldrini (1980), tem-se as seguintes propriedades:

I. ***Comutatividade:*** $A \cdot B$ quase sempre será diferente de $B \cdot A$, sendo, inclusive, possível que uma dessas operações seja possível e a outra não. Ou seja, a multiplicação de matrizes não é comutativa. Por exemplo, sejam as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

II. ***Matriz identidade:*** seja a matriz I uma matriz identidade quadrada de ordem m e A uma matriz qualquer de ordem m também. Então:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

III. ***Distributividade à esquerda:*** a seguinte distributiva é válida para a multiplicação de matrizes:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

IV. ***Distributividade à direita:*** a seguinte distributiva também é válida para a multiplicação de matrizes:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

V. ***Associatividade:*** a associatividade é válida para a multiplicação de matrizes na seguinte forma:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

VI. ***Transposta:*** a transposta de uma matriz que é o produto de $A \cdot B$ é igual à multiplicação das transpostas em ordem inversa:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Fique atento à ordem das matrizes ao utilizar esta propriedade!

VII. ***Matriz nula:*** a multiplicação de uma matriz por uma matriz nula de tamanho adequado sempre é igual a uma matriz nula:

$$0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$$

REFLITA

Acabamos vendo diversas operações utilizando matrizes, como a adição, subtração e os dois tipos de multiplicação envolvendo matrizes, a multiplicação por escalar e a multiplicação entre matrizes. Mas, e a divisão de matrizes? É possível realizar esta operação? Se sim, como você realizaria esta operação?

ATIVIDADE

3) Sejam as seguintes matrizes apresentadas abaixo. Visando fixar a operação de multiplicação de matrizes, analise as seguintes alternativas e assinale a que for correta.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) A multiplicação $B \cdot A$ é igual a:

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

b) A multiplicação $A \cdot C$ é igual a:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

c) A multiplicação $C \cdot A$ é igual a:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

d) A multiplicação $B \cdot C$ é igual a:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e) A multiplicação $A \cdot B$ é igual a:

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Determinantes

Tendo fundamentado as operações possíveis com matrizes, iremos expandir um pouco os conceitos úteis agora. Chegou o momento de discutirmos sobre as **determinantes** das matrizes.

O conceito de determinantes é algo muito antigo, existindo registros sobre tal assunto datando de 250 a.C. em livros chineses, segundo Boldrini (1980). Poole (2004) destaca que o conceito de determinantes precede em cerca de duzentos anos o conceito de matrizes, o que pode ser visto com uma certa estranheza atualmente, pois sempre que se estuda tal tópico, iniciamos por matrizes. Poole (2004) ainda cita que esse desenvolvimento do uso de determinantes se deu para a resolução de inúmeros problemas práticos.

Kolman (1999) adianta que podemos usar as determinantes de matrizes na resolução de problemas de diversas áreas da álgebra, como resolução de sistemas lineares e determinação da possibilidade de inverter uma matriz. Assim, iremos desenvolver aqui os conceitos básicos para trabalharmos com determinantes.

4.1 Conceitos básicos

Segundo Leon (1999), toda matriz quadrada pode ser associada a um número real, sendo este número chamado de **determinante da matriz**. Esse escalar será representado por $det(A)$ ou $|A|$. Essa segunda notação demanda um certo cuidado para não ser confundida com o valor absoluto de A. Com isso, no presente material optou-se pelo uso de $det(A)$.

Um dos conceitos necessários para o entendimento das determinantes é a **permutação**. Kolman (1999) nos apresenta uma definição deste conceito:

Definição 6 – Permutação: Seja $S = \{1,2,\ldots,n\}$ um conjunto com todos os números inteiros de 1 a n, devidamente ordenados de forma crescente. Então, qualquer outra ordem $j_1, j_2, \ldots j_n$ que coloquemos esses elementos é chamada de *permutação* de S.

Kolman (1999) diz que é mais fácil denotarmos os conjuntos S utilizando o n subscrito. Assim, S_n indica um conjunto de n números, S_1 indica o conjunto de 1 número $S_1 = \{1\}$, S_2 indica um conjunto de 2 números $S_2 = \{1,2\}$, S_3 indica um conjunto de 3 números $S_3 = \{1,2,3\}$ e assim por diante.

De modo a demonstrar essa definição, considere o conjunto S_4. Temos, então, que 1,3,2,4 e 4,3,1,2 são permutações de S_4. Assim, podemos colocar qualquer elemento de S na primeira posição, qualquer dos $n-1$ elementos restantes na segunda posição, qualquer dos $n-2$ elementos restantes na terceira posição e assim por diante, até a n-ésima posição conter o último dos elementos. Como Kolman (1999) confirma, podemos calcular quantas permutações um conjunto S pode apresentar; representando este valor máximo por S_m, teremos:

$$S_m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad (1)$$

Note que (1) nada mais é do que a equação utilizada para avaliar o **fatorial** do número n, ou seja, $n!$.

Agora, dada uma permutação de S, dizemos que ela apresentará uma **inversão** se um inteiro j preceder um inteiro menor j_s (KOLMAN, 1999). Por exemplo, analisemos as permutações do conjunto S_3:

1. 123: não existem inversões.
2. 132: existe uma inversão - 0 3 precede o 2.
3. 213: existe uma inversão - 0 2 precede o 1.
4. 231: existem duas inversões - 0 2 precede o 1 e o 3 precede o 1.
5. 312: existem duas inversões - 0 3 precede o 1 e o 3 precede o 2.
6. 321: existem três inversões - 0 3 precede o 2, o 3 precede o 1 e o 2 precede o 1.

Podemos, como outro exemplo, analisar algumas das 24 permutações de S_4. A combinação 3214, por exemplo, apresenta três inversões (o 3 precede o 2 e o 1; o 2 precede o 1) e a combinação 4132 apresenta quatro inversões (o 4 precede o 1, o 3 e 2; o 3 precede o 2).

Se o número total de inversões possíveis em um conjunto for par, dizemos que a permutação também é **par**. De modo semelhante, se o número total de inversões em um conjunto for ímpar, a permutação é chamada de **ímpar**. E, se $n \geq 2$, é possível mostrarmos também que o conjunto S apresentará $n!/2$ permutações pares e um número igual de permutações ímpares (KOLMAN, 1999).

Para comprovar isso, analise as permutações de S_3 que vimos: teremos três permutações pares (123, 231 e 312) e três permutações ímpares (132, 213 e 321). Já em S_2, onde temos 2 permutações, uma delas é par (12, que não apresenta inversão) e a outra é ímpar (21, que apresenta uma inversão).

Tendo em mãos essa definição de permutação e inversão, podemos então dar uma definição formal para o que é determinante.

Definição 7 – Determinante: Seja A uma matriz de tamanho $m \times n$. O determinante $det(A)$ dessa matriz A será

$$det(A) = \sum \quad \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \tag{2}$$

Sendo o somatório tomado sobre todas as permutações possíveis j, j_1,... j_n do conjunto S_n. O sinal $\pm$ será $+$ se a permutação for par e $-$ se a permutação for ímpar (KOLMAN, 1999).

Visando fixar e compreender melhor esta definição, vejamos como procedemos para calcular o determinante de uma matriz de ordem 2. Genericamente, esta matriz pode ser representada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Para obter o determinante, sendo nosso $n = 2$, teremos um total de duas permutações. Logo, a somatória (2) será composta por dois termos:

$$det(A) = \pm a_{1\_} a_{2\_} \pm a_{1\_} a_{2\_}$$

Os espaços vazios deixados devem ser preenchidos com as permutações de S_2, ou seja, 1 e 2 depois 2 e 1. Então:

$$det(A) = \pm a_{11} a_{22} \pm a_{12} a_{21}$$

Como já vimos anteriormente, a permutação 12 é par e a permutação 21 é ímpar. Então, $a_{11}a_{22}$ tem sinal positivo e $a_{12}a_{21}$ tem sinal negativo. Logo:

$$det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Exemplo 2.7 - Encontre o determinante de uma matriz de ordem 3.

Solução

Uma matriz genérica de ordem 3 é representada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Para obter o determinante, sendo $n = 3$, sabemos que existe um total de seis permutações, pois $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Logo, a somatória (2) será composta por seis termos:

$$det(A) = \pm a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \pm a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \pm a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \pm a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \pm a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \\ \pm a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$$

Os espaços vazios deixados devem ser preenchidos com as permutações de S_3: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Logo:

$$det(A) = \pm a_{11}a_{22}a_{33} \pm a_{11}a_{23}a_{32} \pm a_{12}a_{21}a_{33} \pm a_{12}a_{23}a_{31} \pm a_{13}a_{21}a_{32} \\ \pm a_{13}a_{22}a_{31}$$

Já analisamos anteriormente as permutações de S_3: 123, 231 e 312 são pares e 132, 213 e 321 são ímpares. Então:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Existe uma outra forma de obtermos o determinante de uma matriz de ordem três, provavelmente mais simples que o método que exige a resolução da somatória (2). Neste método alternativo, você deve repetir as duas primeiras colunas da matriz, como mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Agora, trace setas nas diagonais formadas da direita para a esquerda e da esquerda para a direita:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Os elementos que são cortados por uma mesma seta formam uma sequência de produto de três elementos. Aqueles que são cortados por setas que vão da esquerda para a direita, são positivos; logo, temos os seguintes produtos positivos:

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31} \text{ e } a_{13}a_{21}a_{32}$$

Os que são cortados por setas que vão da direita para a esquerda são negativos; logo, os seguintes termos serão produtos negativos:

$$a_{12}a_{21}a_{33},\ a_{11}a_{23}a_{32} \text{ e } a_{13}a_{22}a_{31}$$

Você já deve ter percebido que, qualquer que seja a forma, o cálculo de determinantes é extremamente trabalhoso, principalmente se pensarmos em valores de n maiores que 3.

FIQUE POR DENTRO

O trabalho manual com matrizes pode ser algo cansativo e até complexo de se realizar. Após ter o domínio teórico da base, pode ser útil que você também domine o uso de alguns softwares que facilitem o manuseio de grandes matrizes. Dentre os softwares úteis para esse uso, destacam-se o MATLAB®, o SciLab e o GNU Octave, sendo os dois últimos softwares livres. O mundo atual exige um bom conhecimento e manuseio da tecnologia, então, é útil que você seja apto a utilizar algum destes softwares ao menos de forma básica.

Links: <http://www.scilab.org/>

<http://www.gnu.org/software/octave/>

<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

4.2 Propriedades de determinantes

Boldrini (1980) e Kolman (1999) apresentam uma série de teoremas que ditam as propriedades dos determinantes de matrizes. Vejamos tais teoremas:

Teorema 1: Se uma matriz apresenta todos os elementos de uma linha ou coluna como nulos, então $det(A) = 0$ (BOLDRINI, 1980).

Isso se dá pelo fato de que em cada um dos termos usados no cálculo do determinante, teremos um elemento da linha ou coluna nula realizando uma multiplicação. Logo, como qualquer valor multiplicado por zero é igual a zero, teremos um determinante nulo também.

Teorema 2: Os determinantes de uma matriz e de sua respectiva matriz transposta são iguais, ou seja, $det(A) = det(A^T)$ (KOLMAN, 1999).

Para a prova deste Teorema 2, lembre-se que, se $A = [a_{ij}]$, então $A^T = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = a_{ji}$. Utilizando, então, (2):

$$det(A^T) = \sum \quad \pm b_{1j_1} b_{2j_2} \ldots b_{nj_n} = \sum \quad \pm a_{j_1 1} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}$$

Podemos arrumar os fatores $a_{j_1 1}, a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}$ de modo que os índices das linhas fiquem em sua ordem natural. Então:

$$a_{j_1 1} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n} = a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}$$

Vejamos como exemplo o seguinte caso:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$$

$$det(A^T) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 4 - 3 = 1$$

Teorema 3: Se trocarmos a posição de duas linhas de uma matriz, o sinal do determinante irá mudar (KOLMAN, 1999).

A razão de termos isso acontecendo é que, ao trocarmos duas linhas de uma matriz também iremos alterar a paridade do número de inversões dos índices, o que acarreta na troca de sinal dos termos.

Vejamos um exemplo simples deste teorema. Sejam as matrizes A e B abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Então:

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2$$

$$det(B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

Teorema 4: Se uma matriz apresenta duas linhas ou colunas iguais, seu determinante será zero (KOLMAN, 1999).

Vejamos uma demonstração simples deste teorema. Sejam as linhas 1 e 3 de uma matriz $A_{3\times 3}$ iguais. Se trocarmos essas duas linhas de lugar, formando uma nova matriz B, pelo Teorema 3, teremos que $det(B) = -det(A)$. No entanto, como as linhas trocadas são iguais, temos que $B = A$, o que acarreta que $det(B) = det(A)$. Dessas duas observações, chegamos a conclusão que $det(A) = -det(A)$ e o único número que satisfaz essa condição é o zero.

Teorema 5: Se uma matriz B é obtida de uma matriz A onde multiplicamos uma linha ou coluna por uma constante k, então tem-se que $det(B) = k \cdot det(A)$ (KOLMAN, 1999).

A justificativa deste Teorema é semelhante à do Teorema 1. Como em cada termo usado no cálculo do determinante de uma matriz temos um elemento de cada linha ou coluna, temos que em cada elemento teremos um elemento multiplicado por k, de modo que podemos deixar essa constante em evidência, multiplicando o determinante da matriz original.

Teorema 6: Se uma matriz B é obtida de uma matriz A onde somamos a cada elemento de uma r-ésima linha (ou coluna) uma constante k vezes o elemento correspondente da s-ésima linha (ou coluna) de A, sendo $r \neq s$, então $det(B) = det(A)$ (KOLMAN, 1999).

Assim, se temos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} + ka_{s1} & \cdots & a_{rn} + ka_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Note que a r-ésima linha de B nada mais é do que a r-ésima linha de A adicionada de k multiplicado pelos respectivos elementos da s-ésima linha de A. Então:

$$det(B) = det(A)$$

Teorema 7: Para matrizes triangulares superiores ou inferiores, o determinante simplesmente é o produto dos elementos da diagonal principal da matriz (KOLMAN, 1999).

Fora da multiplicação dos elementos da diagonal principal, o cálculo do determinante de uma matriz envolve a multiplicação de elementos que estão na região de nulos desses tipos de matrizes, fazendo com que todos os demais termos do cálculo de determinante sejam nulos. Por exemplo, vejamos a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se que:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 2$$

$$det(A) = 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$$

Teorema 8: O determinante de um produto de matrizes é igual ao produto de seus determinantes, ou seja, $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$ (BOLDRINI, 1980).

A prova deste Teorema é um pouco complexa, mas podemos demonstrá-lo com um exemplo. Sejam as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 2 - 15 = -13$$

$$det(B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 1 = 24 - 3 = 21$$

Se multiplicarmos A por B, encontramos:

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 22 & 27 \end{bmatrix}$$

Para a qual:

$$det(AB) = ab_{11}ab_{22} - ab_{12}ab_{21} = 7 \cdot 27 - 21 \cdot 22 = 189 - 462 = -273$$

Comparando os resultados:

$$det(AB) = -273$$

$$det(A) \cdot det(B) = -13 \cdot 21 = -273$$

ATIVIDADE

4) O tema determinantes tem uma teoria relativamente densa, de modo que é útil ter um bom domínio das bases deste assunto. Englobando todo o assunto de determinantes visto até o momento, analise as alternativas abaixo e assinale a correta.

a) No determinante de um matriz de ordem 5, os termos $a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}$ e $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$apresentarão sinais positivo e negativo, respectivamente.

b) Dadas as matrizes *A* e *B* abaixo, sabemos de antemão que o determinante delas serão iguais.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) O determinante da matriz *A* abaixo é igual a zero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

d) Sendo as matrizes *A* e *B* abaixo, o determinante de $A \cdot B$ é igual a -6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

e) O determinante da matriz abaixo é igual a -6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

INDICAÇÃO DE LEITURA

Nome do livro: Álgebra Linear

Editora: Harper & Row do Brasil

Autor: BOLDRINI, J. L. et al.

ISBN: 8529402022

Comentário: Um livro contendo vários exemplos e linguagem facilitada para o aprendizado. Deve ser mantido quase como uma companhia constante no estudo desta disciplina.

INDICAÇÃO DE LEITURA

Nome do livro: Álgebra Linear

Editora: Cengage CTP

Autor: POOLE, D.

ISBN: 852212390X

Comentário: Este livro apresenta uma linguagem simples e fácil de fixar, apresentando o conteúdo em conjunto com diversos exemplos, facilitando assim, a compreensão de cada tópico tratado.

REFERÊNCIAS

- BOLDRINI, J. L. et al**. Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil, 1980.
- KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** São Paulo: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1999.
- LEON, S. J. **Álgebra Linear com Aplicações.** Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2000.
- LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear: teoria e problemas**. São Paulo: Makron Books, 1994.
- POOLE, David. **Álgebra linear**, trad. Martha Salerno Monteiro. São Paulo: Thomson, 2004.

UNIDADE II

Matriz inversa e sistemas lineares

Renam Luis Acorsi

Introdução

A presente unidade irá finalizar o básico necessário para o manuseio de matrizes, apresentando uma forma alternativa de calcularmos o **determinante de matrizes** e também apresentando o conceito de **matriz inversa**.

Fechado o tópico de matrizes, chegou o momento de iniciarmos nossos estudos num dos tópicos centrais da Álgebra Linear: os **sistemas lineares**. Iremos definir primeiramente o que são estes sistemas lineares, mostrando os tipos genéricos de solução que estes podem apresentar e também como podemos utilizar as matrizes para trabalharmos com sistemas lineares.

Em seguida, discutiremos métodos práticos de resolução de sistemas lineares, sendo o principal foco o **escalonamento de sistemas**. Uma série de exemplos também será apresentada em cada tópico, visando uma melhor compreensão do desenvolvimento desses métodos.

Fonte: Aleksandr Belugin / 123RF.

1. Matriz inversa

Tendo a base de matrizes sido estudadas, vamos agora nos aprofundar um pouco mais em alguns tópicos de matrizes, antes de iniciarmos os nossos estudos de sistemas lineares.

Você deve se lembrar que estudamos como realizar as operações básicas com matrizes, como a adição, a multiplicação por escalar e a transposição. Em seguida, analisamos como se dá a multiplicação entre matrizes e, finalmente, vimos como proceder o cálculo de determinantes, principalmente focando em matrizes de ordem 2 e 3.

Agora, iremos verificar algumas formas mais gerais de avaliarmos o determinante de matrizes de qualquer tamanho. Em seguida, iremos ver como podemos encontrar a inversa de uma matriz, um conceito útil sempre que lidamos com matemática.

1.1 Desenvolvimento de Laplace

Você certamente se lembra que a forma que vimos para calcular o determinante de matrizes pode ser complicada, principalmente para casos de matrizes de ordem maior que 2. Agora, veremos alguns métodos alternativos visando facilitar o cálculo de determinantes.

No primeiro método, veremos como podemos calcular o determinante de uma matriz de ordem n utilizando matrizes de ordem $n-1$. Assim, podemos, por exemplo, calcular o determinante de uma matriz de ordem 3 utilizando matrizes de ordem 2 (KOLMAN, 1999). Esse método, segundo Boldrini (1980), é conhecido como **desenvolvimento** (ou expansão) **de Laplace**.

Vejamos como este método funciona. Considere a matriz A a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Para encontrar o determinante dessa matriz A, utilizamos a seguinte equação:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1)$$

Note que, na soma apresentada em (1), podemos colocar em evidência os termos comuns em alguns produtos. Assim, podemos reescrever (1) da seguinte forma:

$$det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (2)$$

Vamos, agora, analisar os termos entre parênteses na equação (2). Neles, temos a multiplicação de dois elementos sendo subtraídos pelo produto de outros dois elementos. Ou seja, numa forma genérica:

$$a \cdot b - c \cdot d \quad (3)$$

Se compararmos essa equação (3) com o cálculo do determinante de uma matriz B de ordem 2:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$det(B) = b_{11}b - b_{12}b_{21} \quad (4)$$

...veremos que (3) e (4) são equivalentes.

Com isso, podemos enxergar a equação (2) de uma forma diferente. Sejam as seguintes matrizes de ordem 2, derivadas da matriz A descrita acima:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

É possível, então, reescrever (2) como:

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_1) - a_{12} \cdot det(A_2) + a_{13} \cdot det(A_3) \quad (5)$$

Ou seja, vimos que é possível calcular a determinante de uma matriz de ordem três, utilizando apenas matrizes de ordem dois. Essa Equação (5) também pode ser expressa da seguinte forma, como destaca Boldrini (1980):

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}) \tag{6}$$

Essa forma mostrada na Equação (6) apresenta o termo A_{ij}, que é conhecido como submatriz da inicial, da qual se retirou a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Poole (2004) destaca que essa submatriz também pode ser chamada de **cofator-($\boldsymbol{i, j}$) de $\boldsymbol{A}$**, sendo utilizada uma das seguintes notações para sua representação:

$$\Delta_{ij} = C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(A_{ij}) \tag{7}$$

Combinando as Equações (6) e (7) e aplicando para o caso genérico de uma matriz A de ordem n, temos:

$$det(A) = a_{i1} \cdot \Delta_{i1} + a_{i2} \cdot \Delta_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot \Delta_{in}$$

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} \quad a_{ij} \cdot \Delta_{ij} \tag{8}$$

De forma análoga ao que foi desenvolvido para a i-ésima linha, Poole (2004) mostra que podemos repetir o procedimento para a j-ésima coluna, chegando à seguinte Equação:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} \quad a_{ij} \cdot \Delta_{ij} \tag{9}$$

Agora vamos formalizar esse procedimento de cálculo do determinante de uma matriz de ordem n utilizando matrizes de ordem $n - 1$, de acordo com o que Poole (2004) nos diz:

Definição 1 – Desenvolvimento de Laplace: O determinante de uma matriz quadrada A de ordem n, sendo $n \geq 2$, pode ser avaliado utilizando-se a Equação (8), chamada de *expansão por cofatores ao longo da* i*-ésima linha*, ou a Equação (9), chamada de *expansão por cofatores ao longo da* i*-ésima coluna*.

Visando facilitar a identificação do sinal a ser utilizado no cofator, Poole (2004) nos mostra que uma forma rápida de nos lembrarmos do sinal é nos recordarmos que os sinais formam um padrão semelhante a um tabuleiro de xadrez:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Além disso, destacamos aqui uma nova forma de indicarmos o cálculo do determinante de uma matriz. Tal qual nos mostra Poole (2004), podemos indicar o cálculo do determinante de uma matriz A das seguintes formas:

$$det(A) = |A|$$

Assim, se, em uma operação com matrizes apresentarmos os elementos de uma matriz utilizando barras, para delimitarmos tais elementos, estamos indicando o cálculo do determinante. Por exemplo, seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Então:

$$det(A) = a \cdot d - b \cdot c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Exemplo 2.1 - Calcule o determinante da matriz abaixo, utilizando o desenvolvimento de Laplace com expansão por cofatores ao longo da terceira linha e depois, a expansão por cofatores, ao longo da segunda coluna.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução

Apliquemos as expansões indicadas. Primeiramente, realizaremos a expansão por cofatores ao longo da terceira linha, ou seja, $i = 3$. Utilizando a Equação (8), teremos:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \Delta_{ij} = a_{31} \cdot \Delta_{31} + a_{32} \cdot \Delta_{32} + a_{33} \cdot \Delta_{33}$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-8) + (11) + 2 \cdot (2) = -24 + 11 + 4$$

$$= -9$$

Veja que as submatrizes Δ_{3j} são obtidas da matriz original, excluindo-se a linha 3 e a coluna j indicada.

Agora, vamos aplicar a expansão ao longo da coluna $j = 2$. Da Equação (9):

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \Delta_{ij} = a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{22} \cdot \Delta_{22} + a_{32} \cdot \Delta_{32}$$

$$= -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (0) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-10) + 0 + (11) = -20 + 11$$

$$= -9$$

Veja que, como esperado, ambos os resultados dos determinantes são iguais, apesar das diferentes formas empregadas no cálculo. Vale notar, também, que na segunda vez que realizamos este cálculo, foi necessário avaliarmos um determinante a menos, pois $a_{22} = 0$. Assim, fica uma dica para o uso da expansão de Laplace: busque a expansão por cofatores, de modo a minimizar o número de determinantes a ser calculado.

Além do método da expansão de Laplace, temos alguns outros métodos para calcularmos o determinante de uma matriz. Um método que você provavelmente já viu no Ensino Médio, e que já vimos quando iniciamos as nossas discussões, foi o **método de Sarrus**, apresentado por Kolman (1999), onde repetimos as duas primeiras colunas, de uma matriz de ordem três, para calcular o determinante e multiplicamos cada elemento cortado por uma mesma seta, somando os produtos cujas setas apontam para a direita e subtraindo os que as setas apontam para a esquerda:

$$A = \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right] \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

1.2 Matriz inversa

Agora iremos avaliar a possibilidade da existência de uma matriz que possamos corresponder ao inverso de um número real, que seja diferente de zero. Matematicamente falando, o inverso multiplicativo de um número x será o número y tal que o produto $x \cdot y = y \cdot x = 1$, sendo simples inferir que, neste caso, $y = 1/x = x^{-1}$.

No caso de matrizes, também é possível que tenhamos matrizes inversas. No entanto, encontrar tais inversas pode não ser algo tão intuitivo quando trabalhamos com números reais.

Para desenvolvermos o pensamento da inversa de uma matriz, iremos lidar apenas com matrizes quadradas de ordem n. Kolman (1999) nos mostra a seguinte definição:

Definição 2 – Inversibilidade: Uma matriz A de ordem n será *invertível* se existir uma matriz B de ordem n para a qual:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Sendo I_n uma matriz identidade de ordem n. Nesse caso, a matriz B é chamada de *inversa* de A. Caso não exista uma matriz que satisfaça essa condição, então A é chamada de *singular* ou *não-invertível*.

Dada essa definição da possibilidade de invertermos uma matriz, você deve ficar atento ao fato destacado por Kolman (1999): *se uma matriz possui uma inversa, essa inversa é única*. Hoffman & Kunze (1976) nos mostram uma prova disso: suponha que a matriz A possui uma matriz inversa à esquerda B, ou seja:

$$B \cdot A = I_n$$

Se essa mesma matriz A também possui uma matriz inversa à direita Centão:

$$A \cdot C = I_n$$

Aplicando, então, as propriedades da multiplicação de matrizes e das matrizes identidade:

$$B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C = C$$

A partir de agora, também utilizaremos uma notação específica para nos referirmos às matrizes inversas. Tal qual Kolman (1999) propõe, se uma matriz apresentar inversa, sua inversa será indicada pela mesma letra da matriz original com o sobrescrito -1. Assim, se uma matriz A possui inversa, esta inversa será representada por A^{-1}.

Boldrini (1980) também destaca dois pontos interessantes sobre as matrizes inversíveis. Primeiramente, se duas matrizes A e B, de mesma ordem n forem inversíveis, então o produto $A \cdot B$ também será inversível, sendo o resultado igual a $A^{-1} \cdot B^{-1}$. Isso pode ser mostrado de forma semelhante ao que foi feito para indicar que uma matriz, se inversível, apresenta uma única inversa:

$$(A \cdot B) \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

ou:

$$(B \cdot A) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = B \cdot (A \cdot A^{-1}) \cdot B^{-1} = B \cdot I_n \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} = I_n$$

Depois disso, Boldrini destaca outro ponto extremamente importante para esse assunto: *nem todas as matrizes possuem uma inversa*.

Exemplo 2.2 - Seja a matriz A dada abaixo, encontre a sua inversa A^{-1}, se existir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução

Para encontrarmos a inversa de uma matriz, basta aplicarmos a definição dada para uma matriz inversa. Assim, dada uma matriz A, precisamos encontrar uma matriz B tal que:

$$A \cdot B = I_n$$

Como A é uma matriz de ordem 2, esperamos que B também seja. Logo, como não sabemos quais os elementos que a matriz B deve apresentar, representaremos tais elementos como as variáveis a, b, c e d, ou seja:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a multiplicação das matrizes, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 3c & b + 3d \\ 4a + 2c & 4b + 2d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + 3c & b + 3d \\ 4a + 2c & 4b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Devemos, agora, igualar os elementos correspondentes das duas matrizes:

$$a + 3c = 1$$

$$b + 3d = 0$$

$$4a + 2c = 0$$

$$4b + 2d = 1$$

Precisamos resolver simultaneamente essas quatro equações. Da primeira e terceira:

$$4a = -2c \rightarrow a = -c/2$$

$$a + 3c = 1 \rightarrow (-c/2) + 3c = 5c/2 = 1$$

$$c = 2/5$$

Logo, $a = -1/5$. Da segunda e quarta:

$$b = -3d$$

$$4b + 2d = 1 \rightarrow 4(-3d) + 2d = -10d = 1$$

$$d = -1/10$$

Logo, $b = 3/10$. Temos, então, que a matriz inversa de A será:

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Kolman (1999) ainda destaca três propriedades das inversas de matrizes:

1) Se uma matriz A é invertível, a sua inversa A^{-1} também será invertível, tal que $(A^{-1})^{-1} = A$.
2) Se as matrizes A e B são invertíveis, então o produto $A \cdot B$ também será invertível, tal que $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$.
3) Se uma matriz A é invertível, a inversa da transposta de A existirá, tal que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Boldrini (1980) também nos mostra uma relação interessante entre o determinante de uma matriz e a inversibilidade desta. Aplicando o determinante na definição de matriz inversa, temos que:

$$det(A \cdot A^{-1}) = det(I_n)$$

$$det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$$

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Essa relação é interessante pelo seguinte motivo: se $det(A)$ for igual a zero, então, $det(A^{-1})$ não existirá; logo, A^{-1} não existirá. Com isso, temos que *uma matriz irá ser invertível se, e somente se,* $det(A) \neq 0$.

Voltando agora para o cálculo de matrizes inversas, você certamente notou que o cálculo destas pode não ser algo tão simples. Kolman nos mostra uma outra forma de encontrarmos a inversa de uma matriz seguindo três passos:

I. Forme a matriz $[A|I_n]$, que será de tamanho $n \times 2n$, adicionando a matriz identidade à matriz A.

II. Através de uma série de operações elementares nas linhas, você deve buscar deixar o lado esquerdo da matriz encontrada na Etapa I, o mais próximo possível de uma matriz identidade, uma forma chamada de **forma escada reduzida por linhas**.

III. Ao terminar a Etapa II, você deve ter encontrado uma matriz $[C|D]$. Se C for igual a I_n, então D será igual à inversa de A. Caso contrário, A não possui inversa.

O passo mais complexo deste método talvez seja as **operações elementares nas linhas**. Como diz Kolman (1999), estas operações nada mais são do que você realizar o produto de k por todos os elementos de uma linha ou a adição do produto k de uma linha a outra linha, sendo k um real qualquer.

Essa metodologia é útil com matrizes maiores que as de ordem 2, casos onde teríamos em mãos um sistema com, ao menos seis equações para ser resolvido. Para facilitar o entendimento deste método, vejamos um exemplo.

Exemplo 2.3 - Seja a matriz A dada a seguir, encontre a sua inversa A^{-1}, se existir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução

Pela nova metodologia indicada, primeiramente devemos construir a matriz $[A|I_n]$:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Devemos tornar o lado esquerdo da matriz acima o mais próximo possível de uma matriz identidade. Note que isso nem sempre é feito em um único passo, pois, pode ser que várias operações devam ser feitas aqui, para encontrarmos nosso objetivo. Comecemos então multiplicando a linha 1 da matriz por ½; com isso, nossa matriz ficará:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicando também a linha 2 da matriz por ½:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicando agora a linha 1 dessa matriz por -4 e somando à linha 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Somando a linha 2 dessa matriz à linha 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 13/2 & -2 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicando a linha 3 dessa matriz por 2/13:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/13 & 1/13 & 2/13 \end{array}\right]$$

Multiplicando agora a linha 3 dessa matriz por -1/2 e somando à linha 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/13 & 6/13 & -1/13 \\ 0 & 0 & 1 & -4/13 & 1/13 & 2/13 \end{array}\right]$$

Somando a linha 3 dessa matriz à linha 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 5/26 & 1/13 & 2/13 \\ 0 & 1 & 0 & 2/13 & 6/13 & -1/13 \\ 0 & 0 & 1 & -4/13 & 1/13 & 2/13 \end{array}\right]$$

Multiplicando agora a linha 2 dessa matriz por -1/2 e somando à linha 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/26 & -2/13 & 5/26 \\ 0 & 1 & 0 & 2/13 & 6/13 & -1/13 \\ 0 & 0 & 1 & -4/13 & 1/13 & 2/13 \end{array}\right]$$

Veja que o lado esquerdo da matriz é igual à identidade de ordem 3, ou seja, $C = I_3$. Logo, podemos dizer que a inversa de A será igual à:

$$D = A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/26 & -2/13 & 5/26 \\ 2/13 & 6/13 & -1/13 \\ -4/13 & 1/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

Agora que sabemos sobre determinantes e matrizes inversas, temos um exemplo interessante para a aplicação destes assuntos: a criptografia, como exemplifica Leon (1999). Mensagens criptografadas são aquelas que fazem uso de um código para inviabilizar a compreensão de sua leitura por parte de pessoas indesejadas, sendo usadas desde tempos remotos.

Em períodos de guerra, por exemplo, criptografar mensagens é algo vital para ambos os lados envolvidos, pois a transmissão de planos de combate não pode parar e seus oponentes não devem compreender quais serão seus próximos passos.

Atualmente, com uma alta transmissão de dados por programas de mensagens e redes sociais, uma forma que existe de proteger os usuários de terem seus dados revelados é, também, pelo uso de criptografias.

Dando sequência à esse tipo de aplicação, vejamos como Leon (1999) desenvolve o assunto. Seja A uma matriz cujos elementos são inteiros e $det(A) = \pm 1$. Se estas condições forem obedecidas, você terá que A^{-1} será uma matriz composta também por elementos inteiros. Uma matriz A que obedeça a estes quesitos pode ser utilizada como elemento de criptografia.

Por exemplo, suponha que você deseje mandar a mensagem MANDE FOTO criptografada para alguém. Você primeiramente deverá atribuir à cada letra da mensagem um número aleatório, por exemplo:

M=7, A=4, N=12, D=8, E=3, F=2, O=1, T=5

Ou seja, nossa mensagem codificada seria 7, 4, 12, 8, 3, 2, 1, 5, 1. Agora, organizando este código numérico e escrevendo a mensagem como uma matriz B de ordem 3, encontramos:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 12 \\ 8 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz A que cumpra os requisitos ditos acima é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

De modo que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se realizarmos o produto $A \cdot B$, encontramos uma nova matriz, que fornecerá a mensagem que temos que enviar:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 & 12 \\ 8 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 15 & 17 \\ 57 & 38 & 37 \\ 40 & 27 & 32 \end{bmatrix}$$

Assim, a mensagem que você deverá enviar será 24, 15, 17, 57, 38, 37, 40, 27, 32. Para que a pessoa desejada possa decodificar essa mensagem, ela deve multiplicar o produto $A \cdot B$ pela inversa de A. Veja:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 15 & 17 \\ 57 & 38 & 37 \\ 40 & 27 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 12 \\ 8 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Perceba que as operações de cálculo do determinante e da inversa de A foram omitidos aqui, assim como o passo a passo da multiplicação das matrizes. Agora, faça você a conferência desses passos!

ATIVIDADES

1) Diferentemente do que temos com os números reais, as matrizes nem sempre irão apresentar um inverso matemático. Visando praticar o assunto da inversa de matrizes, analise as matrizes abaixo e as alternativas a seguir, assinalando a alternativa correta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Alternativa: A inversa da matriz A abaixo é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/4 \\ -3/2 & -2 & 5/4 \\ 5/2 & 3 & -7/4 \end{bmatrix}$$

b) Alternativa correta: A inversa da matriz C é:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -3/8 & -1/8 & 3/8 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & -1/8 \end{bmatrix}$$

c) Alternativa: Todas as três matrizes acima apresentam inversa.

d) Alternativa: Apenas a matriz C acima não apresenta inversa.

e) Alternativa: Para encontrar a inversa de uma matriz, basta inverter cada um de seus elementos. Logo, matrizes que apresentem 0 como um elemento, como é o caso de B e C, não apresentam inversa.

2. Sistemas lineares

Um problema muito comum que encontramos ao aplicar a matemática em diversas áreas é aquele onde temos a necessidade de resolver mais de uma equação simultaneamente, sendo que, se tais equações forem lineares, teremos um **sistema de equações lineares** (LEON, 1999). Com um pouco de prática, você certamente verá que podemos reduzir diversos problemas complexos para um conjunto de equações lineares, o que pode facilitar muito o seu trabalho.

Portanto, antes de darmos continuidade ao assunto, retomemos um pouco sobre o assunto de equações lineares. Se você se lembrar do assunto funções, certamente recordará do caso de uma equação linear, ou seja, uma equação do tipo:

$$y = a + bx \tag{10}$$

Você ainda deve recordar que essa equação é comumente chamada de **equação da reta**, pois o gráfico de equações desse tipo são retas. Destacamos que, em (10), x e y são chamados de **variáveis,** enquanto a e b são constantes. Poole (2004) expande essa equação para a seguinte forma:

$$a_1y + a_2x = b \tag{11}$$

Sendo que a_1, a_2 e b são constantes.

Poole (2004) mostra que podemos expandir ainda mais a Equação (11), para um caso onde temos n constantes e n variáveis:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{12}$$

Assim, usamos a Equação (12) para definirmos uma **equação linear de $\boldsymbol{n}$ variáveis**, onde as constantes a_1, a_2, …, a_n são chamadas de **coeficientes**.

Poole (2004) também nos diz que, ao resolvermos uma equação linear encontraremos um **vetor** $[s_1\ s_2 \ldots s_n]$ como solução. Ou seja, o vetor solução apresenta valores s_i que iremos substituir no x_i correspondente da equação linear, tal qual a equação seja verdadeira. Por exemplo, o vetor $[3\ \ -5\ \ -2]$, que nos diz que $x_1 = 3$, $x_2 = -5$ e $x_3 = -2$, é um vetor solução da seguinte equação linear:

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8$$

Uma vez que:

$$4 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-2) = 8$$

Mas, note que o vetor indicado não é a única solução para a equação linear dada. Existem outras combinações que também satisfazem a equação dada, como $[0\ 4\ 0]$ e $[2\ \ -3\ \ -2]$.

Agora, quando temos um conjunto de m equações lineares, estaremos lidando com um **sistema linear de $\boldsymbol{m}$ equações com $\boldsymbol{n}$ incógnitas**:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{12}$$

Para um sistema linear, Poole (2004) diz que o vetor solução é aquele que seja solução de todas as m equações simultaneamente.

Kolman (1999) chama a atenção para o uso da forma semelhante à que usamos com matrizes para identificarmos os elementos. Note que cada coeficiente de (12) pode ser representado por a_{ij}, onde i indica qual equação estamos considerando e j nos indica a qual variável o elemento está associado.

Ainda com semelhanças ao caso de matrizes, Leon (1999) sugere que façamos referência a um sistema linear de forma semelhante ao que fazemos com matrizes, ou seja, os sistemas lineares são de ordem $m \times n$. Com isso, sabemos que o vetor solução deverá apresentar sempre n elementos.

Quanto ao vetor solução de um sistema linear, Leon (1999) destaca que nem todos os sistemas lineares irão apresentar uma solução. Um sistema linear que não tenha solução é chamado de **incompatível** ou **impossível**. Logo, a solução de um sistema impossível é um conjunto vazio. Poole (2004) amplia a classificação de sistemas lineares, mostrando três tipos de sistemas lineares:

I. Sistemas lineares que apresentam *um único vetor solução* são chamados de sistemas **possíveis** e **determinados**.
II. Sistemas lineares que apresentam *infinitos vetores solução* são chamados de sistemas **possíveis** e **indeterminados**.
III. Sistemas lineares que possuem *vetor solução algum* são chamados de sistemas **impossíveis**.

Poole (2004) ainda define um sistema linear **equivalente**: sistemas lineares que apresentem o mesmo vetor solução, são ditos equivalentes. Com isso, temos definido o que são sistemas lineares e quais os tipos de sistemas lineares que temos.

2.1 Sistemas lineares e matrizes

O manuseio de sistemas lineares pode ser feito de uma maneira mais prática se escrevermos o sistema numa forma matricial. Como Boldrini (1980) nos mostra, podemos reescrever (12) como uma multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ou seja, o que temos acima nada mais é do que $A \cdot X = B$, sendo a matriz A a **matriz dos coeficientes**, X a **matriz das incógnitas** ou **variáveis** e B a **matriz dos termos independentes**. Por exemplo, para o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

Temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Kolman (1999) dá uma nomenclatura especial para os sistemas cuja matriz dos termos independentes contém apenas elementos nulos, ou seja, temos que $A \cdot X = 0$. Esse tipo de matriz é conhecido como **sistema linear homogêneo**. Num sistema linear homogêneo, podemos ter como resposta um vetor nulo, caso que é conhecido como **solução trivial**. Caso a solução deste tipo de sistema linear homogêneo for um vetor não nulo, temos uma **solução não trivial**. Kolman (1999) destaca que um sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior que o número de equações sempre apresentará uma solução não trivial.

Outra matriz que é útil nos trabalhos com sistemas lineares é a matriz composta pela matriz dos coeficientes e pela matriz dos termos independentes, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Essa matriz, segundo Boldrini (1980), é conhecida como **matriz ampliada do sistema**, onde cada linha da matriz representa, de forma abreviada, uma equação do sistema. Por exemplo, para o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Temos que a matriz ampliada do sistema será:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Note que pode ser muito mais comum você encontrar as incógnitas de um sistema linear representadas por letras diferentes e não por x_n. Assim, você certamente irá se deparar com o uso de x, y, z e assim por diante, no trabalho com sistemas lineares.

2.2 Método da eliminação

Veremos agora um dos métodos mais simples que temos para resolver um sistema linear, o **método da eliminação**. Você certamente já utilizou este método para resolver algum sistema linear, mesmo durante o ensino médio. Kolman (1999) nos diz que esse método consiste de eliminarmos incógnitas através da manipulação das equações que temos disponíveis, de forma semelhante ao processo que utilizamos para encontrar a inversa de uma matriz pelo método de operações elementares por linhas.

Essa manipulação das equações pode ser feita pelo que Boldrini (1980) chama de **operações elementares**. São três as operações elementares que podemos realizar com as linhas de uma matriz ou sistema linear:

I. Permuta entre uma i-ésima e uma j-ésima linha, ou seja, trocarmos de lugar duas linhas, representado por $L_i \leftrightarrow L_j$. Exemplo: $L_1 \leftrightarrow L_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

II. Multiplicação da i-ésima linha por um escalar k que seja não nulo, representado por $L_i \leftrightarrow kL_j$. Exemplo: $L_2 \leftrightarrow 3L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 12 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

III. Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes uma j-ésima linha, representado por $L_i \leftrightarrow L_i + kL_j$. Exemplo: $L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Quando conseguimos encontrar uma matriz B partindo de uma matriz A utilizando uma quantidade finita de operações elementares, Boldrini (1980) diz que podemos chamar B de **linha equivalente** de A.

Vejamos agora alguns exemplos de resolução de sistemas, utilizando o método da eliminação.

Exemplo 2.4 - Encontre uma solução para o seguinte sistema linear, utilizando o método da eliminação.

$$\begin{cases} x + 3y = 17 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Solução

Nosso objetivo com este método é ir eliminando incógnitas para encontrarmos o vetor solução. Assim, se fizermos $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$ no sistema:

$$2x - y - 2(x + 3y) = -1 - 2 \cdot (17) \rightarrow 2x - y - 2x - 6y = -35 \rightarrow -7y = -35$$

$$y = 5$$

Agora que sabemos o valor de y, podemos encontrar x utilizando qualquer uma das duas equações do sistema fornecido. Utilizando a primeira:

$$x + 3y = 17 \rightarrow x + 3 \cdot 5 = 17 \rightarrow x + 15 = 17$$

$$x = 2$$

Faça a prova real destes valores que encontramos com as duas equações do sistema linear fornecido. Logo, o vetor $[2\ 5]$ é o vetor solução para este sistema.

Também podemos encontrar, graficamente, a solução para sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas, como nos mostra Boldrini (1980). Para isso, devemos converter as equações dadas na forma de uma equação da reta, como mostrado na Equação (10). Por exemplo, reorganizando as equações dadas no Exemplo 2.4, encontramos:

$$\begin{cases} y = (17 - x)/3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Agora, chamando a primeira equação de (1) e a segunda de (2) e fazendo os gráficos das retas:

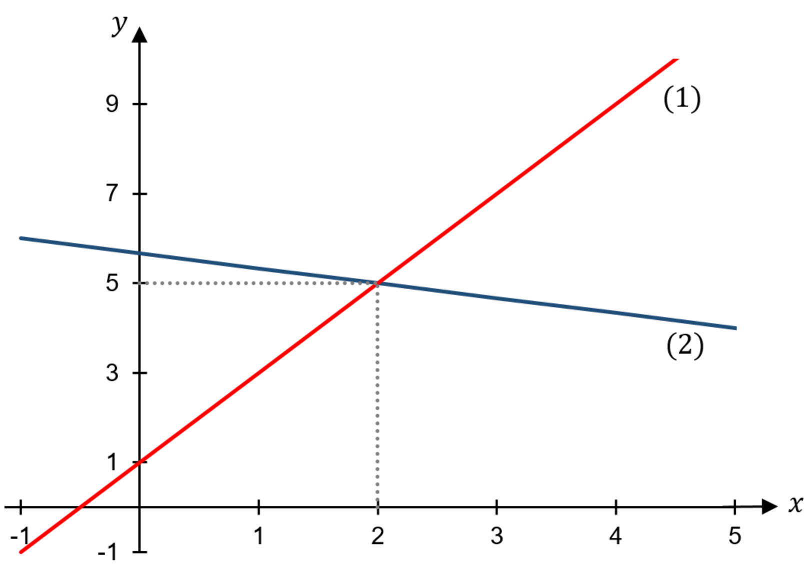


Figura 2.1 - Representação gráfica do sistema linear

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que elas se cruzam em um único ponto, $(2,5)$. Observe que esse ponto contém o mesmo resultado que encontramos anteriormente, pelo método da eliminação.

Exemplo 2.5 - Encontre uma solução para o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$$

Solução

Antes de prosseguirmos com a eliminação de alguma das variáveis, analise as equações que compõem o sistema linear dado. Se você multiplicar a primeira equação por 2, você encontrará:

$$4x - 2y = 8$$

Que é igual à segunda equação do sistema linear. Quando ocorre essa situação de termos uma equação sendo múltiplo de outra, num sistema linear com duas equações, o sistema que temos em mãos é *possível e indeterminado*, pois admite infinitas soluções.

Esse caso é mais facilmente visualizado graficamente. Se você converter as equações dadas para a forma de equação da reta, encontrará duas equações iguais:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Ou seja, graficamente, o sistema é representado por uma única reta:

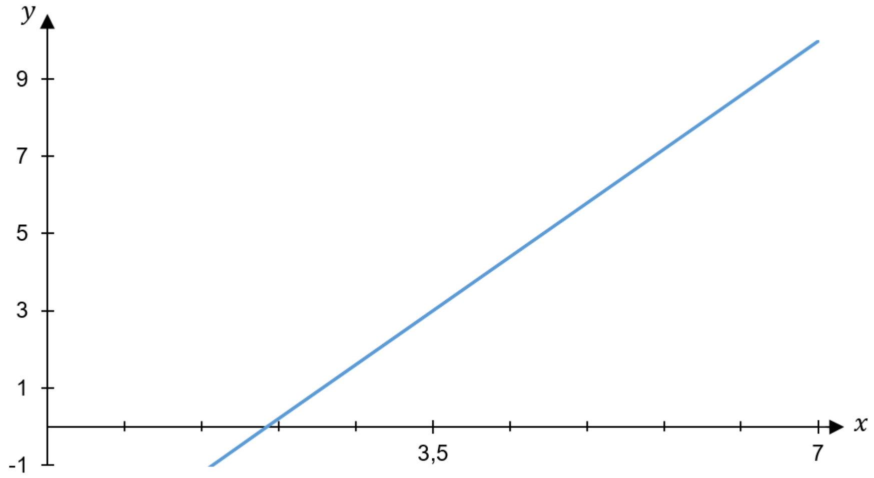


Figura 2.2 - Representação gráfica do sistema linear

Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo assim, qualquer ponto dessa reta é uma solução para o sistema linear dado.

Exemplo 2.6 - Encontre uma solução para o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 7 \end{cases}$$

Solução

Tentaremos eliminar incógnitas para encontrar o vetor solução. Assim, se fizermos $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$ nesse sistema:

$$4x - 2y - 2(2x - y) = 7 - 2 \cdot (5) \rightarrow 4x - 2y - 2x - 2y = -3$$

$$0 = -3$$

Note que é impossível este resultado encontrado. Se você tentar outra eliminação chegará em resultados semelhantes. Isso é um indicativo de que o sistema é impossível, ou seja, não apresenta solução.

Vejamos graficamente como esse sistema se comporta. Convertendo as equações dadas para a forma de equação da reta, encontrará:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 2x - \frac{7}{2} \end{cases}$$

Graficamente, esse sistema é representado por duas retas paralelas, sendo a primeira equação (1) e a segunda (2):

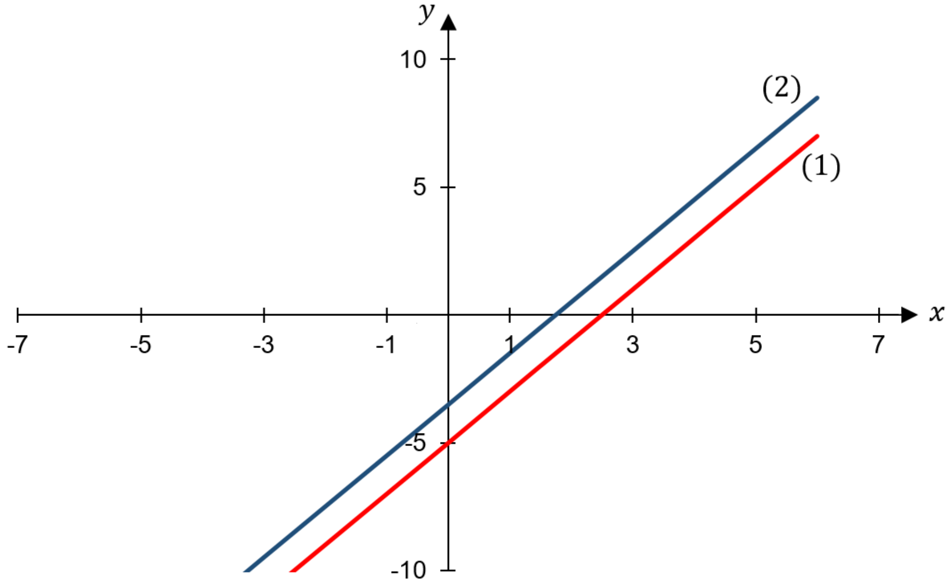


Figura 2.3 - Representação gráfica do sistema linear

Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo assim, não há nenhuma interseção das retas. Logo, não existe nenhuma solução para o sistema dado, ou seja, o sistema realmente é impossível.

FIQUE POR DENTRO

Um grande problema que vários alunos, sejam do ensino fundamental ou superior, enfrentam, ao estudar diversos assuntos da matemática é visualizar a aplicabilidade dos assuntos complexos estudados. No caso dos sistemas lineares, eles são facilmente empregados em inúmeras áreas de conhecimento e, quando você adquirir prática no manuseio e emprego destes sistemas, certamente conseguirá lidar melhor com inúmeros problemas.

Link: <https://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/produtos_2011/Walter%20Rangel.pdf> Acesso em: 20 nov. 2018.

ATIVIDADES

1) Buscando fundamentar a identificação e possibilidade de resolução de sistemas lineares, um dos mais importantes tópicos da álgebra, analise as alternativas abaixo e assinale a que for correta.

a) Alternativa: O sistema abaixo é um sistema linear.

$$\begin{cases} 2x^2 - y^3 = 5 \\ x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases}$$

b) Alternativa correta: O sistema abaixo é um sistema possível e indeterminado, apresentando infinitas soluções.

$$\begin{cases} 4x + 2y - 8z = 14 \\ -2x - y + 4z = -7 \\ 8x + 4y - 16z = 28 \end{cases}$$

c) Alternativa: O sistema abaixo é um sistema possível e determinado, sendo o vetor [1 0,5] sua solução.

$$\begin{cases} 4y + 8x = 10 \\ -2y - 4x = -5 \end{cases}$$

d) Alternativa: Graficamente, o sistema abaixo apresenta-se como duas retas paralelas, o que garante que esse sistema tenha infinitas soluções.

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ -8x + 4y = 4 \end{cases}$$

e) Alternativa: O sistema abaixo é um sistema possível e determinado, sendo o $x = 3$ e $y = 1$ sua solução.

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

3. Métodos diretos para resolução de sistemas lineares

Tendo definido os sistemas lineares, agora iremos nos aprofundar mais no uso de matrizes para resolução e análise de tais sistemas.

3.1 A forma escada ou triangular

Uma das formas mais práticas que temos para resolver sistemas lineares é obter a forma escada, reduzida por linhas, ou forma triangular da matriz ampliada do sistema, ou mesmo forma escalonada. Leon (1999) e Kolman (1999) definem essa forma matricial da seguinte maneira:

Definição 3 – Forma escada: Uma matriz A de ordem n encontra-se na forma escada se:

I. O primeiro elemento não nulo de uma linha é igual a 1.
II. Todas as eventuais linhas nulas, isto é, linhas cujos elementos são todos iguais a zero, ocorrem abaixo de todas as linhas não nulas.
III. Cada coluna contendo o primeiro elemento não nulo de uma linha terá todos os demais elementos nulos.
IV. Se uma linha i e uma linha $i + 1$ são não nulas, o primeiro elemento não nulo da linha $i + 1$ deve encontrar-se à direita do primeiro elemento não nulo da linha i.

Assim, uma matriz que cumpra as quatro condições acima irá encontrar-se na forma escada reduzida, de forma que os primeiros elementos não nulos dessas matrizes formam uma "escada". A seguir, apresentaremos alguns exemplos, analisando se as matrizes se encontram ou não na forma escada.

Exemplo 2.7 - Verifique se as matrizes a seguir encontram-se na forma escada.

$a)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $b)$ $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $c)$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $d)$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$e)$ $f)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução

A matriz $a)$ *não encontra-se na forma escada* porque a condição III não foi cumprida - vide a coluna 3.

A matriz $b)$ *não encontra-se na forma escada* porque as condições I e IV não foram cumpridas - vide as linhas 1 e 2.

A matriz $c)$ não encontra-se na forma escada porque a condição II não foi cumprida - vide a linha 2.

A matriz $d)$ não encontra-se na forma escada porque a condição I não foi cumprida - vide a linha 1.

A matriz $e)$ *encontra-se na forma escada*.

A matriz $f)$ não encontra-se na forma escada porque a condição I e a condição III não foram cumpridas - vide a linha 2 e coluna 3.

Transformar matrizes e sistemas na forma escada é muito útil na resolução de sistemas. Note que um sistema representado pela matriz $e)$ do Exemplo 2.7 nos fornece uma solução direta para um sistema. Como este método geralmente utiliza contas mais simples, praticá-lo é uma excelente forma de dominar a resolução de sistemas.

Boldrini (1980) nos diz que toda matriz $A_{m \times n}$ é linha equivalente de uma única matriz $B_{m \times n}$ na forma escada. Para encontrarmos essa matriz $B_{m \times n}$, basta que utilizemos operações elementares na matriz até que esta cumpra as condições necessárias.

Outro método parecido com o que vimos até aqui para a resolução de matrizes é o **método de Gauss**. O método de Gauss difere do escalonamento apenas no ponto III da definição da forma escada, sendo, para este método:

III') Cada coluna contendo o primeiro elemento não nulo de uma linha terá todos os *demais elementos abaixo desta linha* nulos.

Logo, pelo método de Gauss não temos a solução direta do sistema; conseguimos isso realizando substituições.

Ainda dessa relação de $A_{m\times n}$ com sua linha equivalente escada $B_{m\times n}$, podemos encontrar o **posto** e a **nulidade** da matriz A. Boldrini (1980) define o posto p de A como sendo o número de linhas não nulas em B e a nulidade de A como sendo $n-p$.

Exemplo 2.8 - Encontre o posto e a nulidade da matriz A abaixo.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução

Para encontrar o posto de uma matriz precisamos analisar sua linha equivalente escada. Analisando rapidamente esta matriz, vemos que ela não se encontra na forma escada. Vamos, então, realizar uma série de operações para encontrar a matriz linha equivalente de A na forma escada:

$$A\xrightarrow{L_2\to L_2+L_3}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3+\frac{1}{2}L_1}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\to\frac{1}{4}L_3}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}\xrightarrow{L_2\to\frac{1}{3}L_2}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}\xrightarrow{L_2\to L_2-L_3}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to L_1+6L_2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}\xrightarrow{L_1\to L_1-4L_3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to\frac{1}{2}L_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Agora que encontramos a matriz linha equivalente de A. Note que ela não apresenta nenhuma linha nula; logo, seu posto deve ser igual a 3. Agora, para a nulidade desta matriz, devemos substituir o seu número de colunas do posto, ou seja, a nulidade desta matriz será $4-3=1$.

O posto de uma matriz também pode ser ligado à um termo muito familiar no estudo de sistemas lineares. Ou seja, o posto de uma matriz nos indica o número de equações "independentes" e "dependentes" do sistema. Cada linha nula num sistema é uma linha dependente, ou seja, é uma equação que pode ser obtida de outra. É comum, como destaca Boldrini (1980), chamarmos as linhas dependentes de **combinação linear** das demais linhas.

O posto de uma matriz também pode ser usado para determinar o tipo de sistema com o qual lidamos. Para essa análise, usamos o posto da matriz dos coeficientes de um sistema linear e o posto da matriz ampliada do sistema linear; o posto da matriz dos coeficientes será representado por p_c e o posto da matriz ampliada será representado por p_a, como sugere Boldrini (1980). Caso $p_a = p_c$, iremos nos referir simplesmente ao posto da matriz, representado por p. Assim:

A. Um sistema linear com um número m de equações e n de incógnitas irá admitir soluções se o posto da matriz ampliada for igual ao posto da matriz dos coeficientes, ou seja, $p_a = p_c$.
B. Se as duas matrizes possuem o mesmo posto p e $p = n$, então a solução do sistema será única.
C. Se as duas matrizes possuem o mesmo posto p e $p < n$, então devemos escolher $n - p$ incógnitas, a partir das quais escreveremos as demais p incógnitas em função. O valor $n - p$ é chamado de **grau de liberdade** do sistema.

Exemplo 2.9 - Analise e resolva o sistema a seguir, se possível.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - w = 0 \\ 2x + 4y + 2z + w = 0 \end{cases}$$

Solução

Antes de mais nada, vemos que o sistema dado apresenta o matriz dos termos independentes nula, logo, este sistema é homogêneo. Para tal, sabemos que o vetor nulo [0 0 0 0] é uma solução trivial.

Partindo para uma análise mais a fundo, o sistema pode ser representado pela seguinte matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontrando a matriz na forma escada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -7/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Da qual temos que a matriz linha equivalente dos coeficientes será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -7/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vejamos agora as informações deste sistema, que apresenta $m = 2$ equações e $n = 4$ variáveis. Da matriz escada ampliada, vemos que $p_a = 2$ e da matriz escada dos coeficientes, vemos que $p_c = 2$ também, ou seja, $p = 2$. Logo, essa matriz apresenta solução, como dita a condição A acima.

Como temos que $p < n$, o sistema apresenta grau de liberdade $n - p = 4 - 2 = 2$. Isso quer dizer, na prática, que o sistema só conseguirá ter uma solução em função de duas de suas incógnitas, o que faz com que ele admita infinitas soluções. Então, devemos escolher duas incógnitas para definirmos as demais em função destas.

Se chamarmos z de λ_1 e w de λ_2, conseguiremos encontrar solução para este sistema. Da matriz na forma escada ampliada, encontraremos a seguinte solução para o sistema:

$$x = \lambda_1 + \frac{7}{2}\lambda_2$$

$$y = -\lambda_1 - 2\lambda_2$$

$$z = \lambda_1$$

$$w = \lambda_2$$

Logo, para encontrar uma solução para este sistema, basta escolher valores aleatórios para as incógnitas z e w que, com as relações acima, você encontrará automaticamente os valores de x e y.

Veja que a escolha dessas variáveis é completamente aleatória. Você poderia, por exemplo, escolher chamar x de λ_1 e y de λ_2 ou qualquer outra combinação de duas variáveis para resolver esse sistema. A escolha que fizemos acima se mostra mais simples pelas equações que dispunhamos neste sistema. Por exemplo, fazendo $y = \lambda_1$ e $w = \lambda_2$, encontraremos a seguinte solução para o sistema:

$$x = -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \frac{7}{2}\lambda_2 = -\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2$$

$$y = \lambda_1$$

$$z = -\lambda_1 - 2\lambda_2$$

$$w = \lambda_2$$

ATIVIDADES

1) A resolução e análise de sistemas lineares apresenta diversos métodos, sendo o escalonamento, o método de Gauss e análise do posto muito importantes para este fim. Sobre esses métodos, analise os sistemas abaixo e depois as alternativas a seguir. Então assinale a alternativa que se encontra correta.

$$(i)\begin{cases}3x - y + 3z = -3\\ -2x + 2y + z = 0\\ x + 3y + 5z = 1\end{cases} \qquad (ii)\begin{cases}-x + 2z = 5\\ 3x - 2y + 2z = 9\\ 3y + z = -10\end{cases} \qquad (iii)\begin{cases}2x + 3y + 2z = 7\\ x + 3y + 2z = 5\\ 4x + 6y + 4z = 14\end{cases}$$

a) Alternativa: O sistema (iii) é possível e determinado, pois apresenta $p = n = 3$.

b) Alternativa correta: A solução do sistema (i) é representada pela seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

c) Alternativa: O posto do sistema (ii) é 2, tornando este sistema indeterminado.

d) Alternativa: O sistema (i) apresenta um grau de liberdade.

e) Alternativa: A solução do sistema (ii) é apresentada pela seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Regra de Cramer

No início desta Unidade, vimos como podemos calcular a inversa de matriz. Veremos agora, tal qual Kolman (1999) nos diz, um método no qual podemos resolver sistemas lineares de n equações e n incógnitas, utilizando a inversa da matriz de coeficientes.

Boldrini (1980) e Kolman (1999) alertam que este método só pode ser usado para os casos de sistemas lineares que apresentam o mesmo número de equações e incógnitas. Ou seja, poderemos aplicar este método para os sistemas da seguinte forma:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix} \tag{13}$$

Sendo que podemos representar este sistema pelo produto da matriz dos coeficientes A pela matriz das incógnitas X, produto que será igual à matriz dos termos independentes B. Ou seja, $A \cdot X = B$.

Para desenvolvermos esse método, Boldrini (1980) diz que devemos supor que $det(A) \neq 0$, resultando no fato de A apresentar uma inversa A^{-1}, como já foi discutido anteriormente. Se multiplicarmos o produto de matrizes que representa o sistema mostrado em (13) em ambos os lados pela inversa A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{14}$$

Ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Para uma matriz C qualquer, já vimos que o cofator Δ_{ij} de um elemento c_{ij} qualquer é $(-1)^{i+j} \cdot det(C_{ij})$, sendo C_{ij} a submatriz de C, a qual obtemos pela extração da i-ésima linha e j-ésima coluna. Se unirmos todos os cofatores dessa matriz C, temos a **matriz dos cofatores de** C, $\bar{C} = [\Delta_{ij}]$ (BOLDRINI, 1980).

Tomando a transposta da matriz dos cofatores de C, teremos a **matriz adjunta** de C, $adj\ C = \bar{C}^T$. Partindo disso, Boldrini (1980) enuncia que:

$$C \cdot \bar{C}^T = C \cdot (adj\ C) = \det(C) \cdot I_n$$

Disso, podemos chegar a:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot (adj\ C)$$

Usando essa relação em (14):

$$X = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A) \cdot B \tag{14}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = -\frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n1} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Com isso, temos que:

$$x_1 = \frac{b_1 \Delta_{11} + \ldots + b_n \Delta_{n1}}{det\ (A)}$$

O que podemos expandir para qualquer x_i:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Ou seja, basicamente, ao aplicarmos a Regra de Cramer para a resolução de um sistema, o que iremos fazer é:

I. Calcular o determinante da matriz dos coeficientes $det\ (A)$ e checar se $det\ (A) \neq 0$. Caso isso seja verificado, podemos seguir com o uso do método.

II. Para cada incógnita x_i, iremos alocar a matriz dos termos independentes na i-ésima coluna da matriz dos coeficientes, no lugar dos elementos originais desta coluna. Por exemplo, para x_1:

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

E para x_2:

$$\begin{bmatrix} a_{12} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_1 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

E assim por diante.

III. Para encontrar a incógnita x_i, calculamos o determinante da respectiva matriz obtida em II e dividimos esse valor pelo determinante da matriz dos coeficientes $det\ (A)$.

Vejamos agora, na prática, como funciona o uso da Regra de Cramer para a resolução de sistemas.

Exemplo 2.10 - Resolva o sistema abaixo pela Regra de Cramer, se possível.

$$\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 14 \\ 3x + z = 7 \\ 3y - 2z = -2 \end{cases}$$

Solução

O primeiro passo para usarmos a Regra de Cramer é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema ser diferente de zero. Assim, calculando o determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 18$$

O determinante da matriz dos coeficientes é 18, sendo diferente de zero. Podemos, então, utilizar a Regra de Cramer. Fazendo $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{18} = \frac{18}{18} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{18} = \frac{36}{18} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 14 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{18} = \frac{72}{18} = 4$$

REFLITA

Apesar de ser simples para sistemas pequenos, a Regra de Cramer acaba não sendo muito utilizada em sistemas com muitas incógnitas. Existem diversos casos de problemas de biologia, economia e engenharia onde é comum ter um número de variáveis maior que 100. Você consegue imaginar o porquê de não fazermos uso mais extensivo da Regra de Cramer?

ATIVIDADES (Regra de Cramer)

1) Com respeito à Regra de Cramer para a resolução de sistemas, um método direto para o cálculo da solução de um sistema, analise as seguintes alternativas, assinalando aquela que se encontra correta.

a) Alternativa: O sistema abaixo pode ser resolvido pela regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 2x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

b) Alternativa correta: Para o sistema abaixo, podemos usar a regra de Cramer, com a qual encontramos $y = 7$.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 3 \\ 4x + 2y + z = -4 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

c) Alternativa: Podemos utilizar a regra de Cramer para resolver qualquer sistema linear.

d) Alternativa: Um sistema cujo determinante da matriz dos coeficientes seja menor que 0 não pode ser resolvido pela regra de Cramer.

e) Alternativa: Para o sistema abaixo, podemos usar a regra de Cramer, com a qual encontramos que $z = 2$.

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ -3x + y + 4z = -19 \\ x + 6y + 5z = 19 \end{cases}$$

INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: Álgebra Linear (Coleção Schaum)

Editora: Bookman

Autor: Seymour Lipschutz & Marc Lipson

ISBN: 9788577808335

Comentário: Um livro excelente para fixação de conteúdo, repleto de exercícios e exemplos resolvidos. É um material que certamente lhe auxiliará a fixar melhor e a praticar todos os tópicos de álgebra.

INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: Introdução à Álgebra Linear com Aplicações

Editora: LTC

Autor: Bernard Kolman

ISBN: 852161196X

Comentário: Livro com linguagem simples e vários exemplos. Um grande diferencial que apresenta são exemplos na linguagem MATLAB, que é um software muito bom e prático para se trabalhar com matrizes.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L. et al**. Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil, 1980.

HOFFMAN, K. KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, Editora S.A., 1976.

KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, Editora, 1999.

LEON, S. J. **Álgebra Linear com Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

POOLE, David. **Álgebra Linear**, trad. Martha Salerno Monteiro. São Paulo: Thomson, 2004.

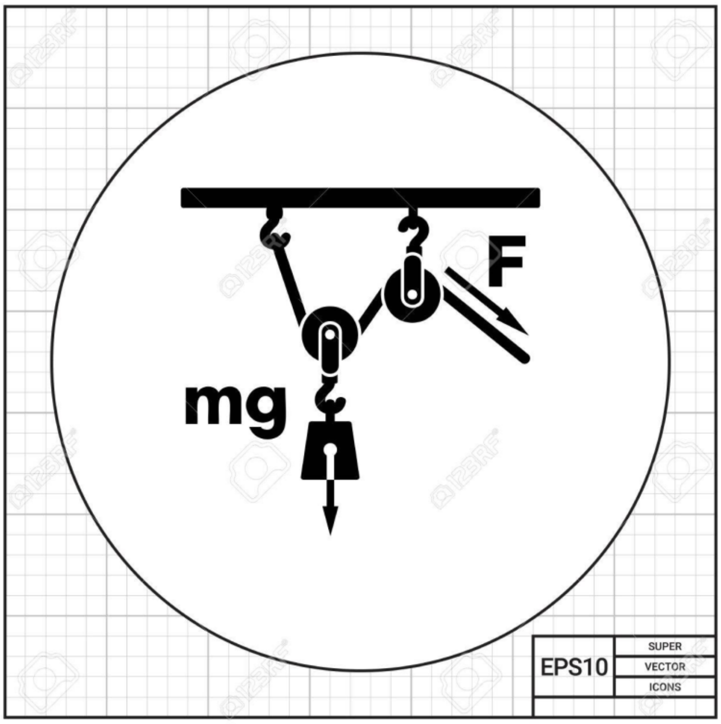
UNIDADE III

Espaços vetoriais

Renam Luis Acorsi

Introdução

Caro(a) aluno(a), um tipo de matriz é uma das unidades fundamentais da Álgebra Linear: as matrizes linha ou coluna, também conhecidas como **vetores**. Agora, iremos nos aprofundar nos conceitos de vetores, buscando uma visão espacial e também definindo as operações básicas que iremos necessitar em nossos estudos. Após fundamentar tal base, veremos que um conjunto de vetores que se mostre fechado quanto à adição e multiplicação por escalar forma um conjunto conhecido como **espaço vetorial**, sendo que podemos encontrar dentro de um espaço vetorial outros subespaços com características semelhantes. Durante essa etapa, estudaremos casos nos quais podemos encontrar um pequeno conjunto de vetores capazes de gerar todos os demais vetores de um espaço ou subespaço vetorial, desenvolvendo a nossa noção a respeito de independência linear e bases de espaços vetoriais.



Fonte: redlinevector / 123RF.

1. Vetores

Enquanto você cursava o ensino médio, durante os estudos da disciplina de Física certamente estudou o conceito de força que atua sobre um corpo qualquer. Para que essa força ficasse bem estabelecida, você deveria determinar qual era o valor numérico (módulo) dela, sua direção e o sentido que ela atuava. Além da força, outras grandezas, como velocidade e aceleração, também precisam dessa definição mais detalhada para serem bem definidas. A esse tipo de grandeza era dado o nome de **grandeza vetorial**, sendo a grandeza definida em si chamada de **vetor** (BOLDRINI, 1980).

Agora, você deve estar se perguntando: qual o sentido de estudarmos tais vetores na Álgebra Linear? Relembremos uma definição dada por Kolman (1999) sobre os diferentes tipos de matrizes: aquelas cujo tamanho sejam $1 \times n$ e $n \times 1$, ou seja, matrizes linha ou coluna, podem ser chamadas de **vetores de dimensão $\boldsymbol{n}$**. Assim, veremos que é possível estudar vetores fazendo uso da Álgebra Linear.

Novamente tomando lembrança dos tipos de grandeza, as quantidades que podem ser caracterizadas apenas por um valor numérico são chamadas de **escalares**. Assim, para facilitar o entendimento dos símbolos que serão utilizados no presente material, os vetores serão representados utilizando uma letra minúscula e negrita, por exemplo, **u**, **v** e **w.** Já os escalares serão representados por letras minúsculas e itálicas, como a, b e c (KOLMAN, 1999).

1.1 Definindo vetores

Inicialmente, vamos nos restringir a vetores no plano cartesiano. Esse sistema já deve ser familiar para você: consiste em duas retas ortogonais, geralmente identificadas por x e y. No espaço definido por essas retas, podemos encontrar infinitos pontos, sendo cada um deles definido por um par de números reais (x_i, y_i), chamados de **coordenadas do ponto**, segundo Boldrini (1980). Assim, o ponto onde as duas retas x e y se cruzam é chamado de origem e tem, por definição, as coordenadas $(0,0)$, sendo tal ponto representado pela letra O ou $O = (0,0)$ (BOLDRINI, 1980).

Kolman (1999) ainda nos informa que, no plano cartesiano, assumimos que os valores à *esquerda* de O no eixo x serão **negativos**, enquanto os valores à *direita* serão **positivos**. Já no eixo y, os valores *abaixo* de O no eixo x serão **negativos,** enquanto os valores *acima* serão **positivos**.

Ainda visando bem definirmos o plano cartesiano, precisamos determinar um certo comprimento a ser definido como a unidade básica de comprimento, ou seja, qual comprimento equivale a 1. Com a distância unitária bem definida nas retas que compõem o plano cartesiano, podemos determinar qualquer comprimento (KOLMAN, 1999).

Agora, sejam dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ contidos nesse plano. Pontos pertencentes a um mesmo plano são ditos **coplanares**. Conforme nos explica Kolman (1999), a união de dois pontos utilizando a menor distância possível entre esses é obtida com um segmento de reta, como nos mostra a Figura 3.1.

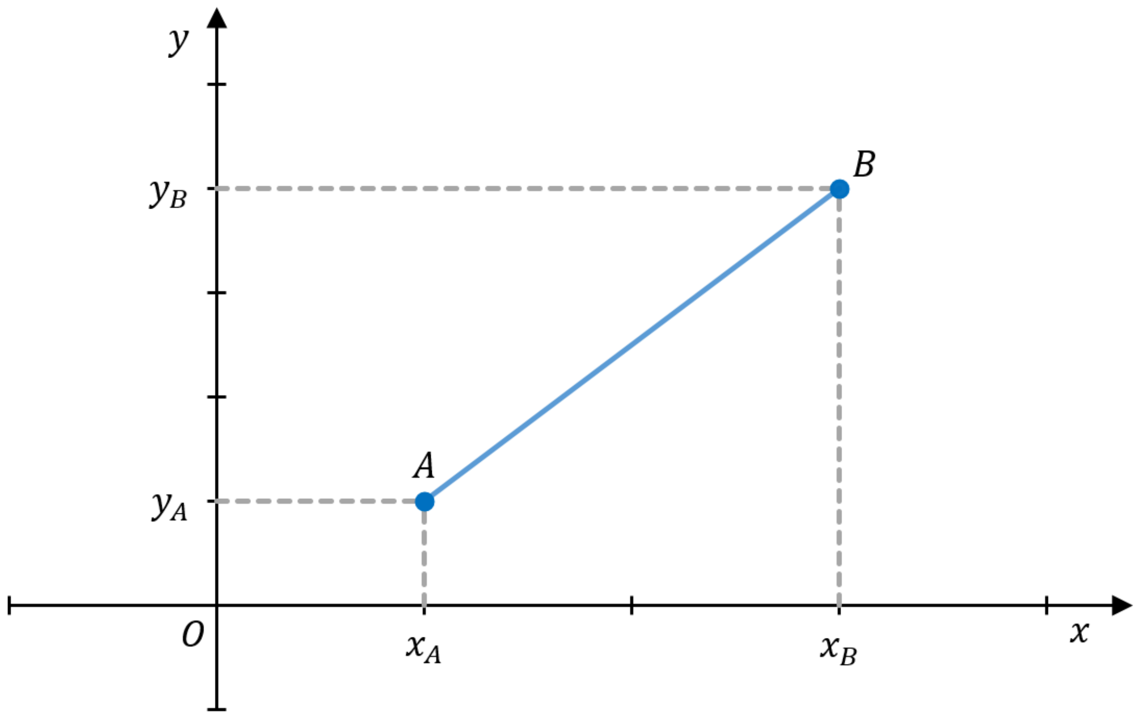


Figura 3.1 - Segmento de reta gerado pela união dos pontos A e B

Fonte: Elaborada pelo autor.

Lembre-se de que uma reta é **infinita**. A partir do momento em que delimitamos o ponto inicial e o ponto final de uma reta, temos um **segmento de reta** (BOLDRINI, 1980).

Agora vem um aspecto importante: qual ponto será o **inicial** e qual será o **final** no segmento de reta acima? Como Boldrini (1980) diz, independente de qual ponto for escolhido como inicial e final, o comprimento do segmento de reta será o mesmo. Ou seja, se escolhermos o ponto A como inicial, teremos o segmento de reta $\overrightarrow{AB}$; mas, se escolhermos o ponto B como inicial, teremos o segmento de reta $\overrightarrow{BA}$. No entanto, o **sentido** do segmento $\overrightarrow{AB}$ será **oposto** ao do segmento $\overrightarrow{BA}$. Observe a diferença na notação: a ordem dos pontos indica qual é o inicial e qual é o final, assim como a seta acima dos pontos.

Kolman (1999) nos diz que, em um segmento de reta, quando definimos a **direção**, que é reta contendo o segmento, e o **sentido**, que é de onde para onde vai o segmento, temos um **segmento de reta orientado**. Falta definirmos o **tamanho** desse segmento de reta, o qual será dado pelo comprimento do segmento. Com todas essas três características definidas, temos um **vetor bidimensional**.

Poole (2004) mostra uma classe específica de vetores do plano cartesiano: aqueles cuja origem se encontra na origem do plano, ou seja, em O. Assim, a cada ponto A, temos um vetor **a**=$\overrightarrow{OA}$. Por exemplo, se $A = (1,3)$, então o vetor **a** pode ser descrito por uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A esses vetores, Boldrini (1980) dá o nome de **vetores no plano**. Partindo disso, Kolman (1999) e Poole (2004) mostram que podemos propor uma definição para vetores no plano:

Definição 1: Um ***vetor bidimensional*** é um vetor que se encontra no plano, podendo ser representado na forma matricial como

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

de modo que x_i e y_i são chamados de **componentes** de **u**. Iremos nos referir a um vetor bidimensional apenas como vetor.

Boldrini (1980) e Poole (2004) ainda acrescentam uma outra notação para vetores, semelhante à da matriz linha. O vetor **u** pode ser representado também como **u**$= (x_i, y_i)$. O ponto $O = (0,0)$ também é conhecido como **vetor nulo**, mesmo que seja apenas um ponto.

Com essa definição de vetores no plano, Boldrini (1980) destaca que todos os pontos do plano $P = (x, y)$ apresentarão um vetor correspondente **p**$=\overrightarrow{OP}$. Esse tipo de correspondência é chamada de **biunívoca**. Ele ainda destaca a definição de vetores **opostos**: um vetor **u** será oposto de um vetor **v** se, e somente se, **u** e **v** apresentarem o mesmo tamanho e direção, mas sentidos opostos. Ou seja, se **u**$= (a, b)$, então, **v**$= -$**u**$= (-a, -b)$.

Poole (2004) ainda nos dá uma definição interessante: o conjunto de todos os vetores que apresentem dois componentes reais é representado por $\Re^2$, sendo que $\Re$ denota que seus componentes são números reais e o número 2 indica a quantidade de números reais necessários para caracterizar o vetor.

Também dada a definição de vetores na forma de matriz, temos que dois vetores serão iguais se, e apenas se, todos os seus respectivos componentes forem iguais, tal qual definimos a igualdade de matrizes (KOLMAN, 1999).

Exemplo 1.1: Verifique se os vetores **u**$= (3,2)$ e **v**$= (1,2)$ são iguais

Solução

Simplesmente, devemos olhar os componentes de cada vetor: veja que o primeiro componente de **u** é igual a 3, enquanto que o primeiro componente de **v** é igual a 1. Logo, mesmo que o segundo componente dos vetores **u** e **v** seja iguais, podemos afirmar que esses vetores não são iguais.

É claro que não lidamos apenas com vetores de origem em O. É muito comum que você encontre casos nos quais a origem do vetor será um outro ponto. Por exemplo, consideremos um vetor **u**$=\overrightarrow{PQ}$, como indica Kolman (1999), sendo que $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. Nesse caso, os componentes desse vetor serão $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$. Ou seja:

$$\mathbf{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{1}$$

É interessante que possamos representar esse vetor **u** também como um vetor com origem O. Basta fazer com que as coordenadas do ponto final sejam iguais a $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Ou seja, teremos na prática um vetor com ponto inicial $O = (0,0)$ e um ponto final $P' = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Exemplo 1.2: Sejam os pontos $P = (2,3)$, $Q = (5,2)$, $R = (0,0)$, $S = (3,-1)$, $A = (-2,1)$ e $B = (1,0)$. Análise uma eventual igualdade entre os vetores **u**=$\overrightarrow{PQ}$, **v**=$\overrightarrow{RS}$ e **w**=$\overrightarrow{AB}$.

Solução

Para que vetores sejam iguais, seus componentes devem ser iguais. Se os três vetores indicados tivessem a origem como ponto inicial, isso seria simples de ser avaliado. No entanto, apenas o vetor **v**=$\overrightarrow{RS}$ apresenta como ponto inicial $(0,0)$. Logo, rapidamente identificamos que **v**$= (3,-1)$.

Agora, para encontrarmos a forma matricial dos demais vetores, usaremos a equação (1) para determinar os componentes de **u** e **w**. Assim:

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{PQ}= \left(x_Q - x_P, y_Q - y_P\right) = (5-2, 2-3) = (3,-1)$$

$$\mathbf{w}=\overrightarrow{AB}= (x_B - x_A, y_B - y_A) = (1-(-2), 0-1) = (3,-1)$$

Como **v**$= (3,-1)$, **u**$= (3,-1)$ e **w**$= (3,-1)$, então podemos afirmar que os três vetores são iguais. Vejamos na Figura 3.2 esses três vetores.

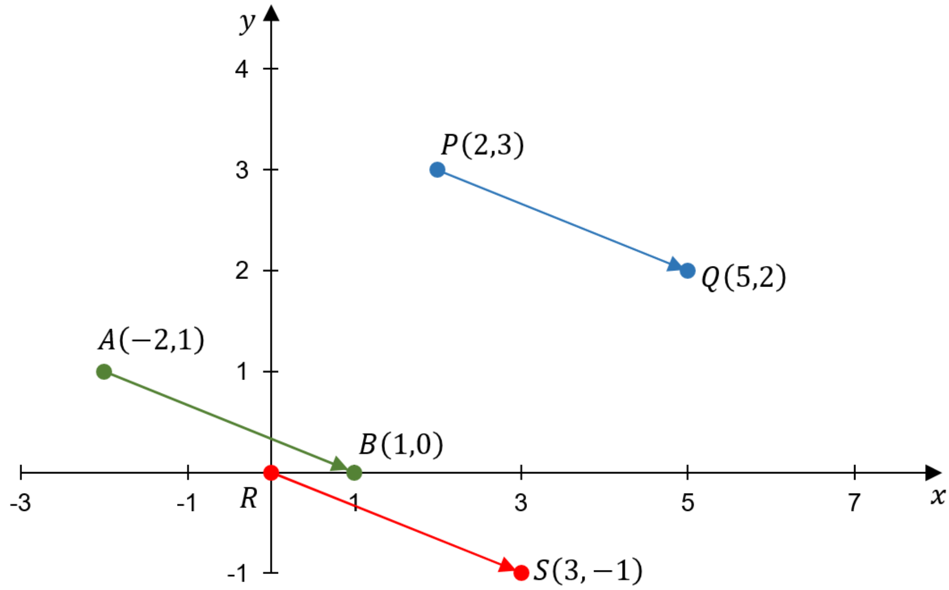


Figura 3.2 - Vetores **u**, **v** e **w** no plano

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que realmente os vetores são todos iguais. A única diferença entre eles é a posição em que se encontram dispersos no plano.

Exemplo 1.3: Seja o vetor **u**$=(4{,}3)$. Para que o vetor **v**$=\overrightarrow{PQ}$, sendo $P=(-1{,}5)$, seja igual a **u**, quais devem ser as coordenadas de Q?

Solução

Como sabemos, dois vetores serão iguais se, e somente se, seus componentes forem respectivamente iguais. Vemos que o ponto P não é localizado na origem. Assim, se considerarmos as coordenadas do ponto Q como (a,b), na forma matricial, teremos o vetor **v** como:

$$\mathbf{v}=\overrightarrow{PQ}=(a-(-1),b-5)=(a+1,b-5)$$

Logo, dada a condição de igualdade, temos que o primeiro elemento do vetor **v** deve ser igual a 4 e o segundo elemento de **v** deve ser igual a 3. Então:

$$a+1=4\rightarrow a=3$$

$$b-5=3\rightarrow b=8$$

Portanto, caro(a) aluno(a), o ponto Q para que tenhamos **u**=**v** deverá ter coordenadas $(3{,}8)$.

1.2 Operações com vetores

Chegou o momento de averiguarmos como podemos proceder ao lidarmos com operações envolvendo vetores. Iremos constatar que existe uma semelhança gigantesca com as operações feitas com matrizes.

i) Tamanho de um vetor

A primeira operação com vetores que estudaremos é como determinar o **tamanho** (ou comprimento ou norma ou magnitude) de um vetor, como define Kolman (1999). Seja o vetor **u**=$\overrightarrow{OP}= (x_i, y_i)$, veja pela Figura 3.3 que podemos utilizar o **teorema de Pitágoras** para calcularmos o comprimento do vetor, pois o tamanho do vetor se mostra como a hipotenusa de um triângulo retângulo de base x_i e altura y_i.

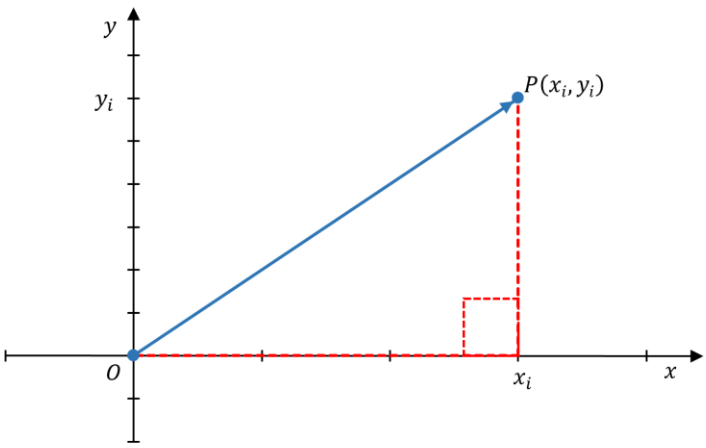


Figura 3.3 - Triângulo retângulo formado pelo vetor **u**

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, temos que o comprimento ||**u**|| do vetor será calculado da seguinte forma:

$$||\mathbf{u}||= \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \qquad (2)$$

Veja que podemos aplicar o mesmo raciocínio para casos de vetores cuja origem não seja o ponto inicial, ou seja, podemos usar o teorema de Pitágoras para determinar a distância entre dois pontos no plano. Sejam os pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, o comprimento do vetor **u** que une esses dois pontos pode ser obtido aplicando o teorema de Pitágoras de acordo com a Figura 3.4:

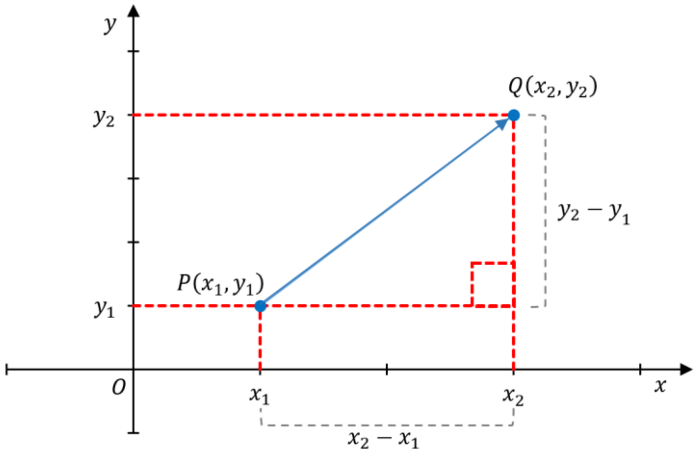


Figura 3.4 - Triângulo retângulo formado pelos pontos P e Q

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando a Figura 3.4, temos um triângulo retângulo cuja base é igual a $x_2 - x_1$ e a altura é igual a $y_2 - y_1$. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras:

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{3}$$

É importante que você note que o tamanho de um vetor deve ser sempre um valor positivo: não existe distância negativa. O uso das duas barras, inclusive, serve para que você se lembre disso, visto a semelhança dessa simbologia com aquela usada para determinar o valor absoluto (KOLMAN, 1999).

Exemplo 1.4: Qual o tamanho do vetor **u**$= (1,4)$? E do vetor **v**$=\overrightarrow{PQ}$, sendo os pontos $P = (1,1)$ e $Q = (3,2)$?

Solução

Para o vetor **u**, basta aplicar a Equação (2):

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Agora, para o vetor **v**, temos de usar a Equação (3):

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Logo, podemos afirmar que o vetor **u** apresenta tamanho (ou comprimento) igual a $\sqrt{17}$ e o vetor **v** apresenta tamanho (ou comprimento) igual a $\sqrt{5}$.

ii) Multiplicação por escalar

Seja k um escalar real qualquer. Boldrini (1980) diz que podemos multiplicar um vetor **u** qualquer por esse k, obtendo um novo vetor definido como

$$\mathbf{w}= k\mathbf{u} \tag{4}$$

Se nessa multiplicação temos $k > 0$, então **w** terá a mesma direção e sentido de **u**, mas o tamanho de **w** será igual a k vezes o tamanho de **u**, ou seja:

$$||\mathbf{w}||= k||\mathbf{u}|| \tag{5}$$

Para o caso onde $k < 0$, então **w** terá a mesma direção de **u**, mas o sentido de **w** será oposto ao de **u**. O tamanho de **w** pode ser obtido pela Equação (5). Já para o caso onde $k = 0$, o resultado será sempre um vetor nulo.

Em termos matriciais, para realizarmos essa operação, basta que nos lembremos da multiplicação por escalar. Assim, se $\mathbf{u}= (a, b)$, ao aplicarmos a Equação (4), teremos

$$\mathbf{w}= k\mathbf{u}= (k \cdot a, k \cdot b) \tag{6}$$

Exemplo 1.5: Seja o vetor $\mathbf{u}= (2,5)$, determine os vetores $\mathbf{w}= 3\mathbf{u}$, $\mathbf{v}= -2\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}= 5\mathbf{w}$.

Solução

Para encontrarmos os vetores desejados, basta que apliquemos a Equação (6). Para **w**, temos $k = 3$, assim:

$$\mathbf{w}= 3\mathbf{u}= (3 \cdot 2, 3 \cdot 5) = (6,15)$$

Para **v**, temos $k = -2$, assim:

$$\mathbf{v}= -2\mathbf{u}= \big((-2) \cdot 2, (-2) \cdot 5\big) = (-4, -10)$$

Finalmente, para **t**, temos $k = 5$. No entanto, devemos multiplicar **w** por esse escalar:

$$\mathbf{t}= 5\mathbf{w}= (5 \cdot 6, 5 \cdot 15) = (30,75)$$

iii) Adição de vetores

Sejam dois vetores $\mathbf{u}= (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v}= (x_2, y_2)$. Kolman (1999) diz que esses dois vetores podem ser somados, gerando um terceiro vetor **w** da seguinte forma:

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{7}$$

Ou seja, ao somarmos vetores, fazemos a soma elemento a elemento, da mesma forma que realizamos a adição de matrizes. Com isso, Boldrini (1980) já adianta que a adição de vetores irá herdar as propriedades da adição de matrizes. Assim, dessas propriedades, podemos inferir que a soma de vetores opostos irá resultar no vetor nulo, ou seja:

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \tag{8}$$

Essa soma de vetores pode ser visualizada graficamente, facilitando nossa compreensão. Para esse fim, Boldrini (1980) pede que pensemos no vetor força que atua sobre um corpo. Esse vetor pode ser representado apresentando a direção e o sentido que atua a força, sendo seu comprimento igual à intensidade da força atuante. A origem do sistema deve ser posicionada no ponto onde a força atua.

Sendo assim, se duas forças F_1 e F_2 atuam num certo corpo, como podemos determinar a força resultante F_R da atuação dessas duas forças? Isso nada mais é do que obter a soma dos vetores F_1 e F_2. Se as forças atuantes forem $F_1 = (a, b)$ e $F_2 = (c, d)$, graficamente iremos encontrar o seguinte:

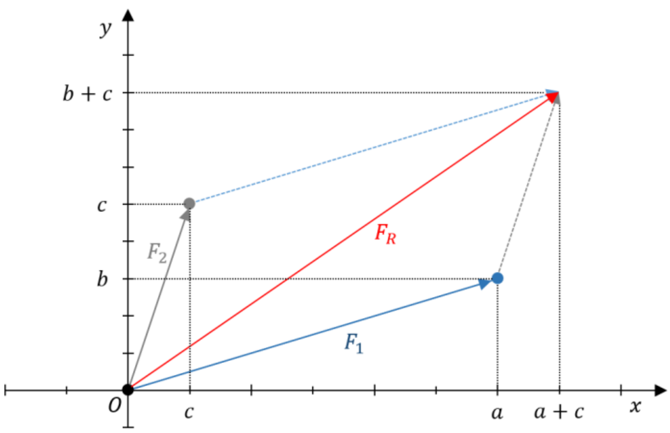


Figura 3.5 - Soma das forças atuando num corpo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Caro(a) aluno(a), analisando melhor a Figura 3.5, vemos que F_R nada mais é do que a diagonal do paralelogramo construído utilizando os vetores F_1 e F_2. Inclusive, como nos diz Boldrini (1980), pela congruência de triângulos, podemos provar que as coordenadas de F_R são $(a + c, b + d)$.

Da adição de vetores, podemos encontrar também a diferença de vetores. Essa diferença é simbolizada por $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, e o vetor resultante é obtido da mesma forma que apresentado na Figura 3.5, com a diferença que usamos o vetor oposto de **v** para construir o paralelogramo, conforme nos diz Kolman (1999). Algebricamente, essa operação pode ser realizada primeiramente realizando a multiplicação de **v** pelo escalar -1 e, em seguida, realizando a adição de **u** a este vetor $-\mathbf{v}$, ou seja

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}+[(-1)\mathbf{v})] = \mathbf{u}+(-\mathbf{v}) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \tag{9}$$

Exemplo 1.6: Sejam os vetores $\mathbf{u}=(1,6)$ e $\mathbf{v}=(3,4)$. Determine os vetores $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{t}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$ e $\mathbf{z}=2\mathbf{u}+3\mathbf{v}$.

Solução

Para encontrarmos **w**, basta aplicarmos a Equação (7):

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}=(\mathbf{1+3,6+4})=(\mathbf{4,10})$$

Para encontrarmos **t,** usaremos a Equação (9). Mas antes avaliamos o oposto de **v**:

$$-\mathbf{v}=-1\cdot(3,4)=(-3,-4)$$

Agora, da Equação (9):

$$\mathbf{t}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})=(1,6)+(-3,-4)=(\mathbf{1-3,6-4})=(\mathbf{-2,2})$$

Finalmente, para **z**, precisamos realizar antes da adição dos vetores a multiplicação de **u** pelo escalar 2 e **v** pelo escalar 3. Disso encontramos:

$$2\mathbf{u}=(2\cdot 1, 2\cdot 6)=(2,12)$$

$$3\mathbf{v}=(3\cdot 3, 3\cdot 4)=(9,12)$$

Finalmente:

$$\mathbf{z}=2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=(\mathbf{2+9,12+12})=(\mathbf{11,24})$$

1.3 Vetores no espaço

De forma semelhante ao que desenvolvemos para o plano cartesiano, também podemos considerar o caso de vetores que se encontram no espaço. Nesse caso, tal qual Boldrini (1980) nos diz, teremos um sistema coordenado composto por três retas, ao invés de apenas duas.

Essas três retas devem ser perpendiculares duas a duas e geralmente são representadas por x, y e z. Agora, para definirmos a localização de um ponto, precisamos definir as três coordenadas. Logo, os pontos definidos no espaço terão simbologia como $P(x, y, z)$ (BOLDRINI, 1980).

Tal qual no caso do plano cartesiano, também se define a interseção das três retas como a origem do espaço ou o ponto $O(0,0,0)$. De forma semelhante ao que Poole (2004) comentou sobre os vetores no plano, temos também que o conjunto de todos os vetores no espaço é representado por $\Re^3$, sendo que $\Re$ denota que seus componentes são números reais e o número 3 indica a quantidade de números reais necessários para caracterizar o vetor. A Figura 3.6 nos mostra a representação de um vetor $A = (1,2,3)$ no plano tridimensional.

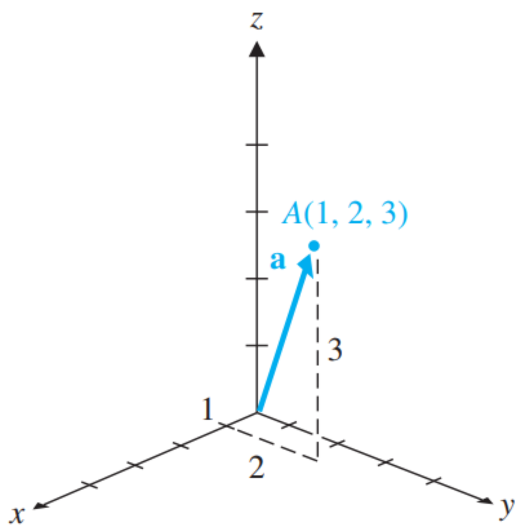


Figura 3.6 - Visualização tridimensional de um vetor

Fonte: Adaptada de Poole (2004).

Kolman (1999) vai ainda além do espaço, definindo vetores de dimensão n. Com isso, ele nos mostra que não estamos limitados à existência de vetores apenas com duas ou três dimensões, mas com quantas dimensões forem necessárias. Ou seja, vetores podem apresentar n dimensões e o conjunto de todos os vetores de n dimensões é representado por $\Re^n$. Ele ainda destaca que, independente da dimensão de um vetor, todos os elementos de um vetor devem ser números reais.

Com essa generalização, devemos propor uma generalização para as operações com vetores de qualquer dimensão. Para o caso da adição, considere os dois vetores **u**$=(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n})$ e **v**$=(\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_2}, \ldots \boldsymbol{v_n})$. Kolman (1999) diz que esses dois vetores podem ser somados de forma semelhante à que vimos na Equação (7), quando definimos essa operação para vetores bidimensionais, gerando um terceiro vetor **w** da seguinte forma:

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}=(\boldsymbol{u_1}+\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_2}+\boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}+\boldsymbol{v_n}) \tag{10}$$

O mesmo podemos estender para a multiplicação por escalar de um vetor de dimensão n. Seja o vetor **u**$=(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n})$ e o escalar k, podemos multiplicar o vetor **u** por esse escalar, encontrando um vetor **w** que será igual a:

$$\mathbf{w}=k\mathbf{u}=(k \cdot \boldsymbol{u_1}, k \cdot \boldsymbol{u_2}, \ldots, k \cdot \boldsymbol{u_n}) \tag{11}$$

Boldrini (1980) e Kolman (1999) enumeram uma série de propriedades para os vetores pertencentes à $\Re^n$. Para averiguarmos tais propriedades, considere os vetores arbitrários **u** e **v** em $\Re^n$ e os escalares a e b. Então:

I. A adição **u**+**v** também será um vetor em $\Re^n$.
II. **u**+**v**=**v**+**u**.
III. **u**+(**v**+**w**) = (**u**+**v**) +**w**.
IV. Existe um **vetor nulo**, representado por **0**, em $\Re^n$ tal que, para qualquer vetor **u** em $\Re^n$, teremos **u**+**0**=**0**+**u**=**u**.
V. Para qualquer vetor **u** em $\Re^n$ existe um vetor $-$**u** em $\Re^n$ tal que **u**+($-$**u**) =**0**. Esse vetor $-$**u** é chamado de **simétrico** de **u**.
VI. O produto por escalar a**u** também será um vetor em $\Re^n$.
VII. $\boldsymbol{a}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\boldsymbol{a}\mathbf{u}+\boldsymbol{a}\mathbf{v}$.
VIII. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\mathbf{u}=\boldsymbol{a}\mathbf{u}+\boldsymbol{b}\mathbf{u}$.
IX. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\mathbf{u}=\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}\mathbf{u})$.
X. **1u**=**u**.

Kolman (1999) mostra que o tamanho de um vetor de dimensão n pode ser calculado de forma semelhante à apresentada também na Equação (2). Seja um vetor **u**$=(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n})$ em $\Re^n$, seu tamanho pode ser obtido por:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_n^2} \tag{12}$$

REFLITA

Muitos estudantes têm dificuldade em visualizar o porquê de estudarmos vetores com dimensão superior a 3 se, de forma geral, o mundo em que vivemos é limitado a essas três dimensões. Você consegue imaginar por que fazemos isso? Qual seria a importância de vetores com dimensão superior a 3?

ATIVIDADES

1) Os vetores são uma unidade fundamental da Álgebra Linear. É esperado que você seja capaz de lidar sem problemas com as operações que envolvem vetores. Visando sua prática em tal assunto, considere os vetores a seguir, analise as alternativas e assinale a correta.

$$\mathbf{u} = (2,0,1) \;\; \mathbf{v} = (1,3,1) \;\; \mathbf{z} = (1,2,3,1) \;\; \mathbf{t} = (-1,-2,3,-1)$$

a) Podemos afirmar que $\mathbf{w} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} = (6,6,4)$.

b) Não existe um vetor $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{z}$.

c) Temos que $\mathbf{w} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} = (2,0,1,1,3,1)$.

d) Temos que $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{z} = (2,5,4,1)$.

e) Temos que $\mathbf{w} = 2\mathbf{z} - \mathbf{t} = (1,2,9,1)$.

2. Espaços vetoriais

Anteriormente, caro(a) aluno(a), vimos de maneira simplificada o espaço $\Re^n$, tendo, inclusive, analisado algumas de suas propriedades básicas. Agora, vamos estudar a estrutura desses **espaços vetoriais** de maneira mais cuidadosa.

2.1 Definindo os espaços vetoriais

Antes de mais nada, vamos definir o que é um espaço vetorial. A definição passa pelas propriedades que foram definidas sobre as operações de soma e produto por escalar de vetores de dimensão n, como você verá. Um espaço vetorial será representado de forma genérica por uma letra maiúscula itálica no presente material, como V. Isso está de acordo com Boldrini (1980) e Kolman (1999):

Definição 2: Um ***espaço vetorial*** é um conjunto V não vazio, cujos elementos são chamados de **vetores** onde as operações de soma e multiplicação por escalar são fechados, ou seja, para quaisquer vetores **u**, **v**, **w**, **t**$\in \boldsymbol{V}$ e $a, b \in \Re$, os seguintes axiomas são válidos:

A. O vetor $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ pertence a V (isso significa ser fechado em relação à soma).

a. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

b. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}) +\mathbf{w}$.

c. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

d. Todo vetor $\mathbf{u}\in \boldsymbol{V}$ apresenta o vetor simétrico $-\mathbf{u}$.

B. O vetor $\mathbf{t}= \boldsymbol{a}\mathbf{u}$ pertence a V (isso significa ser fechado em relação à multiplicação por escalar).

a. $\boldsymbol{a}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \boldsymbol{a}\mathbf{u}+\boldsymbol{a}\mathbf{v}$.

b. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\mathbf{u}= \boldsymbol{a}\mathbf{u}+\boldsymbol{b}\mathbf{u}$.

c. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\mathbf{u}= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}\mathbf{u})$.

d. $\mathbf{1u}=\mathbf{u}$ para todo vetor $\mathbf{u}\in \boldsymbol{V}$.

Boldrini (1980) diz também que essa definição de espaço vetorial pode ser modificada para o caso de usarmos números complexos no lugar de números reais nas operações com escalares. Nesse caso, chamamos o espaço vetorial de **espaço vetorial complexo**. No entanto, o presente material não abordará esse tipo de espaço vetorial.

Vejamos alguns exemplos de espaços vetoriais agora. Como já definimos no item 1.3 da presente unidade, para qualquer $n \geq 1$ todas as n-uplas $\Re^n$de números reais constituem um espaço vetorial. Outro exemplo de espaço vetorial que temos é o conjunto de matrizes reais $m \times n$.

Exemplo 1.7: Considere P_2 o conjunto de todos os polinômios de ordem 2 ou menor cujos coeficientes sejam números reais. Veja se esse conjunto é um espaço vetorial.

Solução

Para tal, consideremos que a_i e b_i sejam números reais. Sejam os seguintes polinômios pertencentes à P_2:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

Temos que a soma desses dois polinômios é igual a:

$$p(x) + q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

Note que para qualquer valor real de a_i e b_i teremos que o maior grau do polinômio $p(x) + q(x)$ será 2. Portanto, vemos que a soma está fechada para esse conjunto, ou seja, $p(x) + q(x) \in P_2$.

Agora, seja o número real c, ou seja, c é um escalar. Se multiplicarmos $p(x)$ por c:

$$cp(x) = c \cdot a_0 + c \cdot a_1x + c \cdot a_2x^2$$

Como c é um número real, novamente temos que o maior grau do polinômio $cp(x)$ será 2. Portanto, vemos que a multiplicação por escalar está fechada para esse conjunto, ou seja, $cp(x) \in P_2$. Com isso, verificamos os axiomas A e B citados anteriormente.

Para esse conjunto de polinômios, temos que o vetor nulo $p_0(x)$ é igual a

$$p(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 0$$

O elemento simétrico de um polinômio $p(x)$ é $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2$. Vamos verificar agora os demais axiomas da adição:

a) Para mostrar que $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$, vamos desenvolver o termo da direita, já que temos o termo da esquerda:

$$\begin{aligned} q(x) + p(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 = p(x) + q(x) \end{aligned}$$

b) Esse axioma apresenta um prova semelhante ao axioma a).

c) Vamos verificar o vetor nulo:

$$p(x) + p_0(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + 0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 = p(x)$$

d) Vamos verificar o elemento simétrico:

$$p(x) + \big(-p(x)\big) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + (-a_0 - a_1x - a_2x^2) = 0 = p_0(x)$$

Vamos verificar, agora, os demais axiomas da multiplicação por escalar. Para tal, consideremos os escalares k e m, ambos reais:

a) $k(p(x) + q(x)) = k[a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2]$

$$= ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + kb_0 + kb_1x + kb_2x^2$$

$$= k(a_0 + a_1x + a_2x^2) + k(b_0 + b_1x + b_2x^2) = kp(x) + kq(x)$$

b) $(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{m})p(x) = (k + m)(a_0 + a_1x + a_2x^2)$

$$= (k + m)a_0 + (k + m)a_1x + (k + m)a_2x^2$$

$$= ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + ma_0 + ma_1x + ma_2x^2$$

$$= k(a_0 + a_1x + a_2x^2) + m(a_0 + a_1x + a_2x^2) = kp(x) + mp(x)$$

c) $(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{m})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{m})(a_0 + a_1x + a_2x^2)$

$$= kma_0 + kma_1x + kma_2x^2 = k(ma_0 + ma_1x + ma_2x^2)$$

$$= k[m(a_0 + a_1x + a_2x^2)] = \boldsymbol{k}[\boldsymbol{mp}(\boldsymbol{x})]$$

d) Vamos mostrar que $\mathbf{1}p(x) = p(x)$para todo $p(x) \in \boldsymbol{V}$:

$$1 \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2) = 1 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1x + 1 \cdot a_2x^2$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 = p(x)$$

Veja que conseguimos provar todos os oito axiomas. Logo, provamos que o conjunto P_2 é um espaço vetorial.

Como Kolman (1999) adianta, o Exemplo 1.7 descreve o passo a passo para determinarmos se um conjunto constitui um espaço vetorial: a primeira coisa que devemos fazer é avaliar a validade dos axiomas A e B. Se esses dois axiomas forem verificados como verdadeiros, então você deve prosseguir para avaliar os demais axiomas.

Tal exemplo nos mostra a extrema versatilidade da Definição 2. Tal definição foi proposta pensando apenas em conjuntos de vetores como segmentos de reta orientados, mas veja que ela pode ser facilmente aplicada a matrizes que não sejam linha ou coluna, polinômios e até mesmo funções. Assim, estabelecemos uma quebra de costumes aqui: vetores não precisam estar necessariamente associados a segmentos de reta orientados (KOLMAN, 1999).

O Exemplo 1.7 também pode ser visto como interessante para a análise de polinômios como espaços vetoriais. Na verdade, Poole (2004) diz que podemos expandir esse conceito ainda mais. Seja o seguinte polinômio de grau n:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Podemos, então, seguir um procedimento semelhante ao mostrado no Exemplo 1.7 para provar que o conjunto P_n composto pelos polinômios de grau $n \geq 1$ é um espaço vetorial.

Exemplo 1.8: Considere F como o conjunto de todas as funções que apresentam valor real definido para um intervalo real. Veja se esse conjunto é um espaço vetorial.

Solução

Para tal, consideremos que f e g sejam funções pertencentes à F. Das definições de funções reais, sabemos que:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Ou seja, sabemos que a função definida como a soma de duas funções é igual à soma dessas duas funções. Com isso, o axioma A está provado.

Sendo c um escalar, então, também das definições de funções reais, sabemos que:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

Ou seja, a multiplicação da função por um escalar avaliado em x é igual à função avaliada em x multiplicada pelo escalar c. Com isso, o axioma B está provado.

Os demais axiomas podem ser facilmente provados partindo desses dois. Assim, como uma prática para você, avalie a validade dos demais oito axiomas.

Exemplo 1.9: Considere $V = M(m \times n)$ como o conjunto de todas as matrizes reais. Tal conjunto é um espaço vetorial?

Solução

Considere as matrizes $A, B \in V$ e $c \in \Re$. Se realizarmos a adição $C = A + B$, temos que C também será uma matriz pertencente ao conjunto V. De forma semelhante, a multiplicação por escalar de uma matriz que pertença à V resultará numa matriz de mesma ordem que a original. Sendo assim, os axiomas A e B estão provados.

Os demais axiomas podem ser facilmente provados partindo desses dois e dos seus conhecimentos de matrizes. Assim, como uma prática para você, avalie a validade dos demais oito axiomas.

Agora, antes de passarmos para o próximo passo na análise de espaço vetoriais, Poole (2004) enuncia uma série de propriedades através de um teorema:

Teorema 1: Sendo V um espaço vetorial, **u** um dos vetores pertencentes à$\boldsymbol{V}$ e $a \in \Re$ um escalar, então:

a) $\mathbf{0u}=\mathbf{0}$.
b) $a\mathbf{0}=\mathbf{0}$.
c) $(-1)\mathbf{u}= -\mathbf{u}$.
d) Ao se deparar com $a\mathbf{u}=\mathbf{0}$, então você tem que $a = 0$ ou $\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

2.2 Subespaços vetoriais

Você já deve ter percebido que ao estudarmos $\Re^n$ temos uma situação onde existem espaços vetoriais dentro de espaços vetoriais. Por exemplo, $\Re^2$ está contido em $\Re^4$ e $\Re^3$ está contido em $\Re^7$. Ou seja, podemos encontrar subconjuntos W dentro de um espaço vetorial V que sejam espaços vetoriais menores em relação às operações de V. Nessa situação, chamamos W de **subespaço vetorial de** V(BOLDRINI, 1980; KOLMAN, 1999).

Um exemplo simples que temos de um subespaço vetorial é dado por Boldrini (1980): uma reta que passa pela origem do plano cartesiano. Ou seja, temos o espaço $V = \Re^2$ e o subespaço W, que é a reta que passa pela origem do plano cartesiano. Mas por que essa reta é um subespaço?

Veja que funciona como um pequeno espaço vetorial contido dentro de V: se somarmos dois vetores contidos em W, o vetor resultante ainda estará em W; se multiplicarmos algum vetor de W por um escalar, o vetor resultante também estará dentro de W. Ou seja, W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar. A Figura 3.7 irá ajudar a visualização do que foi dito:

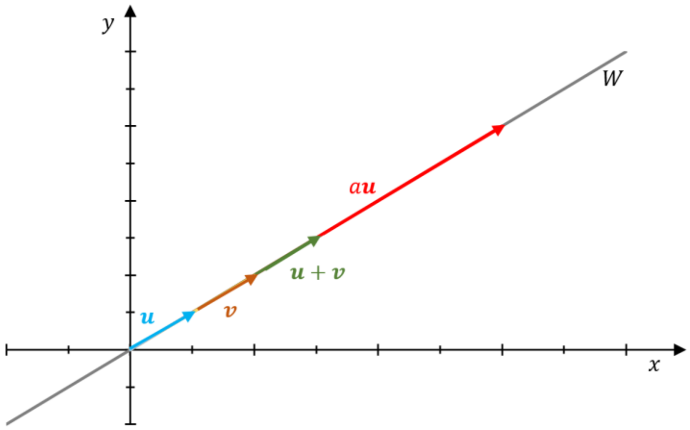


Figura 3.7 - Subespaço W no plano cartesiano V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos, então, definir, de acordo com Boldrini (1980), o que é um subespaço vetorial.

Definição 3: Sendo V um espaço vetorial, o subconjunto W contido em V de será um subespaço de V se:

a) Para quaisquer vetores **u**, **v**$\in W$, tem-se que **u**+**v**$\in W$.
b) Para qualquer $a \in \Re$ e **u**$\in W$, tem-se que a**u**$\in W$.

Boldrini (1980) ainda diz que as duas condições anteriores são o suficiente para garantir que, ao operarmos em W , iremos obter apenas vetores dentro de W. Também não precisamos provar os demais oito axiomas de um espaço vetorial, pois sua prova já está contida na validade de V, que contém W.

Kolman (1999) também nos alerta para o fato de todos os subespaços vetoriais precisarem conter o vetor nulo. Disso, temos que *todos os espaços vetoriais* irão admitir sempre ao menos dois subespaços vetoriais: um conjunto formado apenas pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial. Boldrini (1980) chama esses dois subespaços vetoriais que sempre existem de **subespaços triviais**. No entanto, deve-se tomar o cuidado de não pensar que todo conjunto que apresenta o vetor nulo será um subespaço.

Exemplo 1.10: Considere $V = M(n \times n)$ como o conjunto de todas as matrizes quadradas. O subconjunto W constituído de todas as matrizes triangulares inferiores é um subespaço de V?

Solução

Para checarmos isso, caro(a) aluno(a), devemos verificar os dois axiomas da Definição 3. Uma matriz triangular inferior é representada genericamente por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Logo, veja que, se somarmos uma matriz triangular inferior A com outra matriz triangular inferior B, a matriz resultante $C = A + B$ ainda será uma matriz triangular inferior, pois sempre teremos que todos os elementos acima da diagonal principal serão nulos. Com isso, o axioma a) está provado.

Se realizarmos a multiplicação por escalar de uma matriz desse tipo, também teremos uma matriz triangular inferior como resultado, pois qualquer escalar multiplicado por zero é igual a zero. Então, o axioma b) está provado. Logo, podemos afirmar que o W é um subespaço de V.

Exemplo 1.11: Uma situação interessante sobre subespaços vetoriais ocorre quando encontramos o conjunto solução de um sistema linear homogêneo W, que pode ser considerada um subespaço de $\Re^n$. Verifique isso considerando um sistema linear homogêneo genérico:

Solução

Um sistema linear homogêneo genérico é mostrado abaixo, sendo A a matriz $m \times n$ dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e $\mathbf{0}$ é a matriz dos termos independentes, cujos elementos são todos nulos:

$$AX = \mathbf{0}$$

Veja que o conjunto de todas as matrizes incógnitas para esse caso nada mais é do que $\Re^n$, ou seja, esse é o nosso espaço vetorial. Agora, precisamos verificar se W prova os axiomas dados na Definição 3. Seja $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \boldsymbol{W}$, ou seja, os dois vetores são solução do sistema. Isso implica que $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ e $A\mathbf{y}=\mathbf{0}$. Vejamos agora o que temos de $A(\mathbf{x}+\mathbf{y})$:

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x}+A\mathbf{y}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

Assim, comprovamos que W está fechado para a soma. Vejamos agora para o caso de multiplicação por escalar; seja $c \in \Re$, então:

$$A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c \cdot \mathbf{0}=\mathbf{0}$$

Ou seja, $c\mathbf{x}$ é uma solução também, ou seja, W está fechado para a multiplicação por escalar também. Logo, podemos afirmar que o W é um subespaço de $\Re^n$. Esse subespaço é, geralmente, chamado de **espaço solução** sistema linear homogêneo ou **núcleo** da matriz A, como nos diz Kolman (1999).

Finalizando o assunto de subespaços vetoriais, Boldrini (1980) enuncia dois teoremas interessantes:

Teorema 2 - Intersecção de subespaços: Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V, então, a intersecção entre W_1 e W_2, representada por $W_1 \cap W_2$, também será um subespaço de V.

Teorema 3 - Soma de subespaços: Se W_1 e W_2 são subespaços de um espaço vetorial V, então o conjunto

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{v} \in V; \mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ e } \mathbf{w}_2 \in W_2\}$$

também será subespaço de V.

FIQUE POR DENTRO

Um bom domínio de espaços vetoriais é fundamental para o desenvolvimento de diversas áreas. Um exemplo de área que faz um uso muito intenso disso é a resolução de equações diferenciais, um tema essencial para quem lida com problemas de matemática, engenharia, e física. Um bom conhecimento e trabalho de tal assunto é extremamente necessário para se mostrar capaz de lidar com tais problemas.

Link:
<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94353/chinchio_ac_me_rcla.pdf?sequence=1>.

ATIVIDADES

2) Os espaços e subespaços vetoriais são muito importantes para nosso trabalho com vetores, sendo interessante que tenhamos um bom conhecimento sobre suas propriedades. Desse modo, analise as seguintes alternativas e assinale a correta.

a) Se V é um espaço vetorial e o vetor $\mathbf{u} \in \boldsymbol{V}$, na multiplicação por escalar $a \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ só é possível se $\mathbf{u}$ for um vetor nulo.

b) Se $V = \Re^2$, uma reta que não passe pela origem do plano cartesiano não será um subespaço W de V.

c) É possível que, se $\mathbf{v}+\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{z}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{z}$, caso $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in \boldsymbol{V}$.

d) O conjunto solução de sistemas lineares não homogêneos pode ser considerado um subespaço.

e) Sendo Z o conjunto dos números inteiros, podemos dizer que Z é um espaço vetorial.

3. Dependência e independência linear

Agora que sabemos o que é um espaço vetorial, você deve estar imaginando a infinidade de vetores que um espaço pode apresentar. No entanto, um número tão grande de vetores para descrever um conjunto não é algo tão prático. Logo, é melhor que sejamos capazes de definir um espaço vetorial com o mínimo possível de vetores. A identificação de quais vetores são realmente úteis para se descrever um espaço vetorial é feita verificando se um dado vetor pode ser escrito como uma combinação de outros vetores, ou seja, se um dado vetor é uma **combinação linear** de outros vetores do espaço vetorial. Tais vetores são desnecessários para a definição de um espaço vetorial. Veremos como podemos identificar quais vetores são indispensáveis para descrevermos um espaço vetorial.

3.1 Combinação linear

Como já vimos ao estudar vetores, podemos sempre encontrar novos vetores a partir de outros vetores conhecidos. Agora, veremos isso em espaços vetoriais. Boldrini (1980) e Kolman (1999) definem essa forma de obtenção de novos vetores como **combinação linear**:

Definição 4: Considere o espaço vetorial V. Sejam $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\ldots,\mathbf{v}_n$ vetores pertencentes a tal espaço vetorial e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reais. Então, um vetor

$$\mathbf{v}= a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+a_3\mathbf{v}_3 \ldots +a_n\mathbf{v}_n$$

também será elemento de V, sendo esse vetor **v** uma *combinação linear* de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\ldots,\mathbf{v}_n$. Note que, se pegarmos o conjunto W que contém todas as combinações lineares do espaço vetorial V, teremos um subespaço vetorial.

Exemplo 1.12: Verifique se o vetor $\mathbf{v}= (1,2,4)$ é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1= (1,1,2)$, $\mathbf{v}_2= (2,0,1)$ e $\mathbf{v}_3= (1,1,0)$.

Solução

Para realizarmos tal verificação, consideremos os escalares a_1, a_2 e a_3. Precisamos verificar se existem números reais que satisfaçam

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$$

Substituindo os vetores:

$$(1,1,5) = a_1(1,1,2) + a_2(2,0,1) + a_3(1,1,0)$$

Se realizarmos as operações anteriores, conseguimos encontrar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 1a_3 = 1 \\ a_1 + 0a_2 + 1a_3 = 2 \\ 2a_1 + 1a_2 + 3a_3 = 4 \end{cases}$$

Resolvendo tal sistema, você deve encontrar a seguinte solução: $a_1 = 9/4$, $a_2 = -1/2$ e $a_3 = -1/4$. Como encontramos valores reais para os escalares, podemos afirmar que **v** é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ na seguinte forma:

$$\mathbf{v} = \frac{9}{4}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{v}_3$$

3.2 Independência linear

Em seus estudos de Álgebra Linear, é fundamental ser capaz de identificar se um vetor é uma combinação linear de outros vetores. Como adiantado no início desse tópico, ao estudarmos espaços vetoriais, é possível visualizar espaços vetoriais que irão conter uma infinidade de vetores. No entanto, os vetores que são combinação linear são vistos como supérfluos para a descrição de tal espaço. Iremos, então, mostrar que, em sua maioria, os espaços vetoriais irão apresentar um número finito de vetores que podem descrever completamente o espaço vetorial (KOLMAN, 1999).

Para isso, precisamos definir dependência e independência linear. Boldrini (1980) define tais termos como:

Definição 5: Considere o espaço vetorial V para o qual $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ sejam vetores pertencentes a V. Um conjunto $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ será dito **linearmente independente** (ou *LI*) se a seguinte equação

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Caso exista um único $a_i \neq 0$, então o conjunto $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ é **linearmente dependente** (ou *LD*).

Agora que sabemos identificar um conjunto de vetores como LD ou LI, podemos verificar se um pequeno conjunto de vetores é capaz de gerar um espaço vetorial. Ou seja, dizemos que um conjunto de vetores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ irá gerar um espaço vetorial V se todos os demais vetores desse espaço forem uma combinação linear dos vetores desse conjunto. Assim, conforme explica Kolman (1999), dizemos que S gera V.

O procedimento necessário para identificarmos se um conjunto de vetores S gera um espaço vetorial V é constituído de dois passos, de acordo com Kolman (1999):

a) escolha um vetor arbitrário **v** de V;

b) verifique se o vetor arbitrário escolhido em a) é uma combinação linear dos vetores de S; caso positivo, S gera V; caso negativo, S não gera o espaço V.

Vejamos na prática como isso é feito.

Exemplo 1.13: Considerando o espaço vetorial $V = \mathfrak{R}^3$, verifique se o conjunto $S = \{\mathbf{v}_1 = (1,3,2), \mathbf{v}_2 = (0,2,1) \mathbf{v}_3 = (3,1,3)\}$ gera tal espaço vetorial

Solução

Para averiguarmos se o conjunto dado gera o espaço vetorial V em questão, devemos verificar os dois passos citados anteriormente. Consideremos o vetor arbitrário $\mathbf{v} = (a, b, c)$, onde a, b e c são números reais. Vejamos se existem constantes a_1, a_2 e a_3 tal que:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

Substituindo os vetores de S:

$$a_1(1,3,2) + a_2(0,2,1) + a_3(3,1,3) = (a, b, c)$$

De onde encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 3a_3 = a \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = b \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 = c \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, você deverá encontrar:

$$a_1 = \frac{5a + 3b - 6c}{2}$$

$$a_2 = -\frac{7a + 3b - 8c}{2}$$

$$a_3 = -\frac{a + b - 2c}{2}$$

Veja que conseguimos uma solução para qualquer valor de a, b e c. Logo, podemos concluir que S gera V.

ATIVIDADES

3) A capacidade de determinar se um conjunto de vetores é capaz de gerar um espaço vetorial é importante para que sejamos capazes de determinar as propriedades desse espaço. Focando na geração de espaços vetoriais, analise as alternativas a seguir e assinale qual dos conjuntos de vetores dados se mostra incapaz de gerar $\Re^2$.

a) $\mathbf{v}_1 = (1,2)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1,1)$
b) $\mathbf{v}_1 = (0,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,1)$.
c) $\mathbf{v}_1 = (3,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-2,2)$
d) $\mathbf{v}_1 = (-1,-2)$ e $\mathbf{v}_2 = (4,2)$
e) $\mathbf{v}_1 = (0,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1,0)$

4. Base de um espaço vetorial

Sabemos que um espaço vetorial V pode ser descrito tomando como base um número finito de vetores dentre os diversos vetores que compõem um espaço vetorial. Chegou o momento de determinarmos agora um conjunto mínimo de vetores de V que possam gerar todos os demais vetores de V (BOLDRINI, 1980).

Kolman (1999) chama esse conjunto mínimo de vetores que geram um espaço vetorial V de **base** de um espaço vetorial. Boldrini (1980) e Kolman (1999) definem uma base como:

Definição 6: Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\}$ pertencentes ao espaço vetorial V será uma base desse espaço vetorial se todos os vetores $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\}$ forem LI e se V for completamente gerado por $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\}$.

Kolman (1999) destaca que, para que os vetores que compõem o conjunto $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\}$ formem uma base de V, é necessário que tais vetores sejam distintos e não nulos.

Um dos exemplos mais simples que temos de base nos é dado por Boldrini (1980), que é o conjunto formado por $\mathbf{v}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,1)$ para o $\Re^2$. Esse par $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ também é conhecido como **base canônica** ou **base natural** para o $\Re^2$. Bases canônicas são as bases mais intuitivas para cada espaço vetorial.

Outros exemplos de bases canônicas de espaços vetoriais muito comuns são dados por Poole (2004), por exemplo, o conjunto $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ para o espaço P_n dos polinômios de grau n. Já o conjunto

$$E = \{E_{11}, ..., E_{1n}, E_{21}, E_{2n}, ... E_{m1}, ... E_{mn}\}$$

é a base canônica para o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$. Os vetores dessa base são encontrados da seguinte maneira:

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad E_{1n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad E_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$E_{m1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad E_{m2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad E_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Boldrini (1980) destaca um outro ponto muito importante sobre bases: existem espaços vetoriais que não apresentam uma base finita. Esse caso é muito comum de ocorrer no espaço de funções. Logo, situações como essa exigem que tenhamos um conjunto infinito de vetores para gerar o espaço vetorial. No entanto, o presente material irá lidar apenas com bases finitas.

Boldrini (1980) e Kolman (1999) também enunciam um conjunto de teoremas que são úteis para obtermos as propriedades da base de um espaço vetorial.

Teorema 4: Se o conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ for não nulo e gerar um espaço vetorial V, então podemos extrair uma base para V desse conjunto de vetores

Teorema 5: Se um espaço vetorial V apresenta como base um conjunto finito de n vetores, qualquer conjunto que apresente mais do que n vetores será LD. Ou seja, o máximo de vetores que essa base finita suporta para ser LI é n.

Teorema 6: Qualquer conjunto de vetores LI em um espaço vetorial V pode ser completado para gerar uma base V.

Do Teorema 5, Boldrini (1980) mostra uma conclusão interessante: qualquer base de um espaço vetorial deve sempre apresentar o mesmo número de vetores. Tal número é chamado de **dimensão** do espaço V, sendo representado por $dim\ V$. Logo, se soubermos a dimensão de um espaço vetorial, podemos determinar quantos vetores são necessários para gerar uma base para tal espaço.

Boldrini (1980) prova isso da seguinte forma: sejam os conjuntos $v = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $u = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ duas bases distintas de V. Como v gera V e os vetores do conjunto u devem ser LI para ser uma base de V, concluímos pelo Teorema 5 que $m \leq n$. Analisando de outra forma, u gera V e os vetores do conjunto v devem ser LI para ser uma base de V, o que nos leva, pelo que nos diz o Teorema 5, a $n \leq m$. Dessas duas análises, chegamos a um caso limite: a única forma que temos dessas duas condições serem reais é que $m = n$.

4.1 Mudança de base

Várias áreas das ciências exatas e tecnológicas apresentam problemas nos quais um referencial adequado significa muito menos trabalho na hora de serem solucionados. Por exemplo, ao analisarmos um reator cilíndrico, é muito mais simples usarmos um sistema que seja descrito com características mais comuns de um cilindro.

Mas como fazemos para escolher esse novo referencial? Após escolhermos o novo referencial, como podemos relacionar as coordenadas dos pontos no referencial original com as coordenadas do novo referencial?

Quanto à primeira pergunta feita acima, Boldrini (1980) diz que sua resposta é bem complicada. A escolha de um novo referencial, devido à sua complexidade, é abordada por outras disciplinas, não sendo abordada nesta. Já a segunda pergunta é aquela em que iremos nos focar em responder agora.

Até o momento, não nos preocupamos com a ordem dos vetores em uma base: o que vimos até agora é que um espaço vetorial V de dimensão n irá apresentar uma base S com n vetores, como nos diz Kolman (1999). Se o conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma

base ordenada para V, então o conjunto $S' = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ é uma base ordenada diferente para V. Ou seja, tal qual Hoffman e Kunze (1976):

Definição 7: Uma **base ordenada** de um espaço vetorial V nada mais é do que um conjunto com coordenação fixa de seus vetores. Logo, é conveniente representarmos os elementos $\mathbf{v}_i$ de uma base ordenada com i crescente.

Logo, considerando a base ordenada $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ como a geradora de um espaço vetorial V, qualquer vetor desse espaço vetorial poderá ser escrito como

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 \dots + a_n\mathbf{v}_n$$

onde a_i indicam números reais. Como afirma Kolman (1999), podemos nos referir a esse vetor genérico numa forma matricial:

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

sendo essa matriz chamada de **vetor de coordenadas de v em relação à base ordenada *S***. Essa matriz é única, sendo seus elementos, como podemos ver, as coordenadas de **v** em relação à S.

Exemplo 1.14: Considerando S a base canônica para $\Re^3$, calcule o vetor de coordenadas do vetor $\mathbf{v} = (-2,2,3)$ em relação à S.

Solução

A base canônica de $\Re^3$ é composta pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$. Logo, para encontrarmos o vetor indicado, precisamos encontrar os escalares a_1, a_2 e a_3 tal que:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

Substituindo os vetores de S:

$$a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = (-2,2,3)$$

Dada a simplicidade da base canônica, conseguimos identificar que $a_1 = -2$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 3$. Logo:

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.15: Seja o espaço vetorial P_1 composto por todos os polinômios de ordem igual ou menor a 1. Se $S = \{$**v**1,**v**2$\}$ e $T = \{$**w**1,**w**2$\}$, onde **v**1$= (t)$, **v**2$= (1)$, **w**1$= (t+1)$ e **w**2$= (t-1)$, para o vetor **v**$= 3t + 4$ calcule $[\mathbf{v}]_S$ e $[\mathbf{v}]_T$.

Solução

Encontrar $[\mathbf{v}]_S$ é relativamente simples, visto que S é a base canônica de P_1. Precisamos encontrar os escalares a_1 e a_2 tal que:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$$

Conseguimos identificar rapidamente que $a_1 = 3$ e $a_2 = 4$. Assim:

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Agora, para encontrar $[\mathbf{v}]_T$ precisaremos realizar um pouco mais de cálculos, pois precisamos escrever **v** como uma combinação linear de **w**1 e **w**2. Ou seja:

$$b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{v} \rightarrow b_1(t+1) + b_2(t-1) = 3t + 4$$

Reescrevendo a relação acima:

$$b_1t + b_1 + b_2t - b_2 = 3t + 4$$

$$t(b_1 + b_1) + (b_1 - b_2) = 3t + 4$$

Podemos concluir que $(b_1 + b_1) = 3$ e $(b_1 - b_2) = 4$. Ou seja, temos em nossas mãos um sistema linear:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 3 \\ b_1 - b_2 = 4 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, você deve encontrar que $b_1 = 7/2$ e $b_1 = -1/2$. Então:

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Como vimos com o Exemplo 1.15, para um mesmo espaço vetorial podemos encontrar dois vetores de coordenadas de um vetor **v** em relação a diferentes bases ordenadas - no caso do exemplo, encontramos em relação à S e a T.

Kolman (1999) também cita que os vetores de coordenadas dos elementos de um espaço vetorial têm um comportamento algébrico semelhante a vetores. Com isso, temos que, sendo S uma base para um espaço Vcuja dimensão é n, os vetores **v** e **w** pertencentes à V e o escalar c:

$$[\mathbf{v}+\mathbf{w}]_S = [\mathbf{v}]_S + [\mathbf{w}]_S \tag{13}$$

$$[c\mathbf{v}]_S = c[\mathbf{v}]_S \tag{14}$$

O que nos leva ao fato de que o vetor coordenada de uma soma de dois vetores é igual à soma dos vetores de coordenadas de cada um. As relações (13) e (14) ainda podem ser tratadas de forma genérica:

$$[c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n]_S = c_1[\mathbf{v}_1]_S + c_2[\mathbf{v}_2]_S+\ldots c_n\mathbf{v}_n \tag{15}$$

Partindo disso, considere $S = \{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ e $T = \{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\ldots,\mathbf{w}_n\}$ como bases para um espaço vetorial V, cuja dimensão seja n. Um vetor $\mathbf{v}\in V$ irá apresentar vetores de coordenadas $[\mathbf{v}]_S$ e $[\mathbf{v}]_T$ e, segundo Kolman (1999), podemos analisar a relação entre esses dois vetores de coordenadas.

Para analisarmos essa relação, Kolman (1999) pede que consideremos um vetor arbitrário $\mathbf{v}\in V$. Sabemos que esse vetor pode ser representado por

$$\mathbf{v}= a_1\mathbf{w}_1+a_2\mathbf{w}_2+\ldots+a_n\mathbf{w}_n \tag{16}$$

o que nos leva a

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Como S também é uma base para V, então:

$$[\mathbf{v}]_S = [a_1\mathbf{w}_1+a_2\mathbf{w}_2+\ldots+a_n\mathbf{w}_n]_S$$

Podemos trabalhar a relação acima com as Equações (13) a (15) para chegarmos a:

$$\mathbf{v}= [a_1\mathbf{w}_1]_S + [a_2\mathbf{w}_2]_S+\ldots+[a_n\mathbf{w}_n]_S$$

$$\mathbf{v}= a_1[\mathbf{w}_1]_S + a_2[\mathbf{w}_2]_S+\ldots+a_n[\mathbf{w}_n]_S$$

O vetor de coordenadas $\mathbf{w}_j$ em relação à S pode ser escrito como

$$[\mathbf{w}_j]_S = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}$$

Então:

$$[\mathbf{v}]_S = a_1\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix} + \cdots a_n\begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

ou:

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S\leftarrow T}[\mathbf{v}]_T \quad (17$$

sendo

$$P_{S\leftarrow T} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [[\mathbf{w}_1]_S + [\mathbf{w}_2]_S + \cdots + [\mathbf{w}_n]_S]$$

A matriz $P_{S\leftarrow T}$ é chamada de **matriz de mudança de uma base *T* para uma base *S***, segundo Kolman (1999). Para encontrarmos essa matriz, precisamos seguir um procedimento de duas etapas. Para vermos tais etapas, consideremos $S = \{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\}$ e $T = \{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2...,\mathbf{w}_n\}$ como bases para um espaço vetorial V. A primeira consiste em encontrarmos o vetor de coordenadas $\mathbf{w}_j$, com j variando de 1 a n em relação à base S, ou seja, devemos escrever $\mathbf{w}_j$ como uma combinação linear de vetores em S:

$$a_{1j}\mathbf{v}_1+a_{2j}\mathbf{v}_2+\ldots+a_{nj}\mathbf{v}_n=\mathbf{w}_j$$

Resolvemos esse problema pela transformação da matriz aumentada do sistema em sua forma escada reduzida. A matriz de mudança $P_{S\leftarrow T}$ de uma base T para S é encontrada pegando $[\mathbf{w}_j]_S$ como a j −ésima coluna da matriz de mudança. Vejamos um exemplos desse método.

Exemplo 1.16: Seja o espaço vetorial $\Re^3$. Se $S = \{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ e $T = \{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\}$, onde $\mathbf{v}_1= (1,0,2)$, $\mathbf{v}_2= (0,2,1)$, $\mathbf{v}_3= (1,1,1)$, $\mathbf{w}_1= (12,12,6)$, $\mathbf{w}_2= (12,3,6)$ e $\mathbf{w}_3= (9,9,3)$, calcule a matriz mudança de base da base T para a base$S$.

Solução

Para que encontremos $P_{S\leftarrow T}$, primeiramente devemos encontrar os escalares a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 e c_3 tal que:

$$a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+a_3\mathbf{v}_3=\mathbf{w}_1$$

$$b_1\mathbf{v}_1+b_2\mathbf{v}_2+b_3\mathbf{v}_3=\mathbf{w}_2$$

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{w}_3$$

Cada uma das equações vetoriais acima irá nos levar a um sistema linear que apresentará três equações e três incógnitas da seguinte forma:

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \;\vdots\; \mathbf{w}_1]$$

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \;\vdots\; \mathbf{w}_2]$$

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \;\vdots\; \mathbf{w}_3]$$

Destes três sistemas, encontramos as seguintes matrizes aumentadas:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Devemos resolver os três sistemas acima, encontrando a forma escada de cada um deles. Seria algo muito trabalhoso de ser feito, mas note que a matriz dos coeficientes de cada um dos sistemas acima é igual. Com isso, podemos combinar todos as matrizes aumentadas dos três sistemas, formando uma matriz dita **particionada**:

$$\left[\begin{array}{ccc:c:c:c} 1 & 0 & 1 & 12 & 12 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 12 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

Um sistema representado por esse tipo de matriz pode ser resolvido por escalonamento normalmente. Basta realizarmos as operações elementares, buscando deixar a matriz dos coeficientes na forma escada e, assim, encontrando a forma escada da matriz acima:

$$\left[\begin{array}{ccc:c:c:c} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 13 & 13 \end{array}\right]$$

Se você resolver individualmente cada um dos sistemas, deverá encontrar as mesmas respostas mostradas na matriz particionada acima. Com tal matriz, encontramos a matriz mudança de base da base T para a base$S$ utilizando os vetores solução que encontramos:

$$P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -4 \\ -2 & -5 & -2 \\ 16 & 13 & 13 \end{bmatrix}$$

ATIVIDADES

4) O conhecimento sobre bases vetoriais é imprescindível para poupar o estudante de trabalhar com enormes conjuntos vetoriais, visto que uma base vetorial indica o mínimo de vetores necessários para caracterizar um espaço vetorial. Focando nesse assunto, analise as seguintes alternativas e assinale a correta.

a) Se e_i é a $i-$ésima coluna de uma matriz identidade $n \times n$, o conjunto $S = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$, então S não é uma base de $\Re^n$.

b) O conjunto $S = \{(1,0,1), (2,0,0)\}$ não é uma base de $\Re^3$.

c) O conjunto $S = \{(1,0), (0,1), (2,1)\}$ é uma base de $\Re^2$.

d) A base canônica do conjunto P_n apresenta dimensão n..

e) O conjunto $S = \{(1,0,0), (1,0,1), (0,0,1)\}$ é uma base de $\Re^2$.

INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: Álgebra Linear com aplicações

Editora: LTC Editora

Autor: Steven J. Leon

ISBN: 8521617690

Comentário: O livro **Álgebra Linear com aplicações**, de Steven J. Leon, é um bom livro para o estudo de vetores. Apresenta uma grande variedade de exemplos e uma boa quantidade de imagens que facilitam a compreensão de tal assunto.

Nome do livro: Álgebra Linear com aplicações

Editora: Bookman

Autor: Howard Anton

ISBN: 8540701693

Comentário: O livro **Álgebra Linear com aplicações**, de Howard Anton, é um livro extremamente didático. Apresenta uma excelente quantidade de exemplos e exercícios para fixação, além de seções interessantes para a aplicação computacional. Vale a pena sua leitura.

REFERÊNCIAS

- BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científico, 1976.
- KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 1999.
- POOLE, D. **Álgebra Linear**. Tradução de Martha Salerno Monteiro. São Paulo: Thomson, 2004.

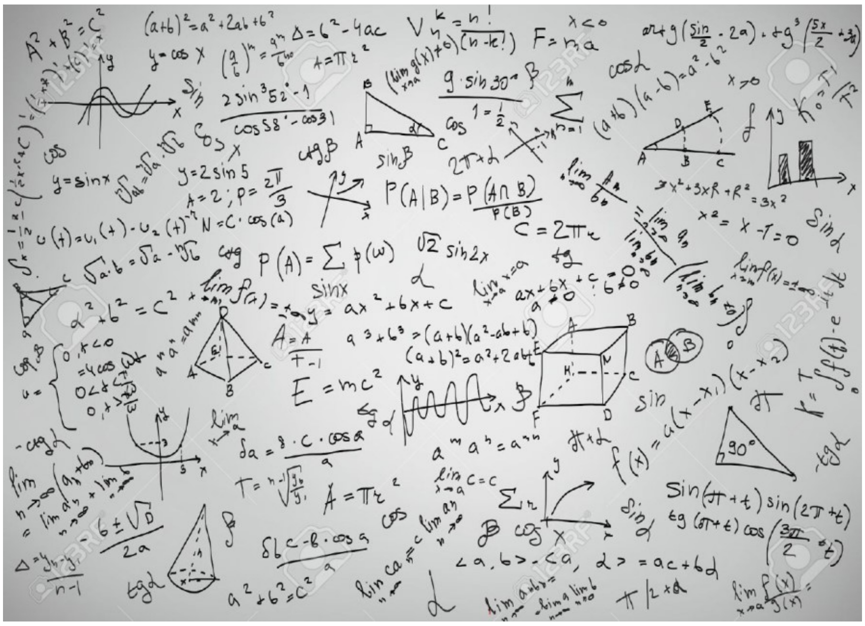
UNIDADE IV

Transformações lineares

Renam Luis Acorsi

Introdução

A presente unidade é um fechamento para os estudos de Álgebra Linear. Nela, iremos desenvolver os conceitos a respeito de transformações lineares e entender como esses podem nos ser úteis. Em seguida, iremos focar nosso trabalho em autovalores e autovetores, um conceito que tornará extremamente prático o nosso trabalho para outras áreas, como a resolução de sistemas lineares. Após formalizar os conceitos de autovetores e autovalores, veremos que os encontrar via definição pode não ser algo muito prático. Iremos, então, desenvolver um outro método para lidar com isso, que se mostra muito mais prático e rápido de se aplicar - a diagonalização de matrizes.



Fonte: Denis Ismagilov / 123RF.

1. Introdução às transformações lineares

Um dos tipos mais comuns e simples que temos de funções são as funções lineares, que definem de uma maneira direta como uma função y depende de uma variável x:

$$y = ax + b \tag{1}$$

A função y é mostrada como $f(x) = y$ em diversos casos. Esse tipo de função apresenta-se graficamente como um reta, de modo que visualizar funções lineares também não é algo muito trabalhoso (BOLDRINI, 1980).

Boldrini (1980) nos dá um exemplo desse tipo de função. A extração de óleo de soja feita da soja pode ser expressa linearmente. Sendo y a quantidade de litros de óleo de soja extraídos (em litros) e x a massa de soja (em quilogramas), podemos estimar a quantidade de óleo extraído pela seguinte relação:

$$y = 0{,}2x \tag{2}$$

De (2), conseguimos deduzir que, a cada quilograma de soja utilizado no processo de extração, conseguiremos extrair 0,2 L de óleo. Para isso, basta que façamos a substituição do valor de x para encontrarmos $f(1)$:

$$y = f(1) = 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}2$$

Podemos, assim, encontrar a quantidade de óleo que conseguiremos extrair a partir de qualquer quantidade de grãos de soja. Essas quantidades podem ser encontradas mais facilmente se usarmos um gráfico, visto que funções lineares são de simples visualização; logo, graficamente, essa função pode ser vista como:

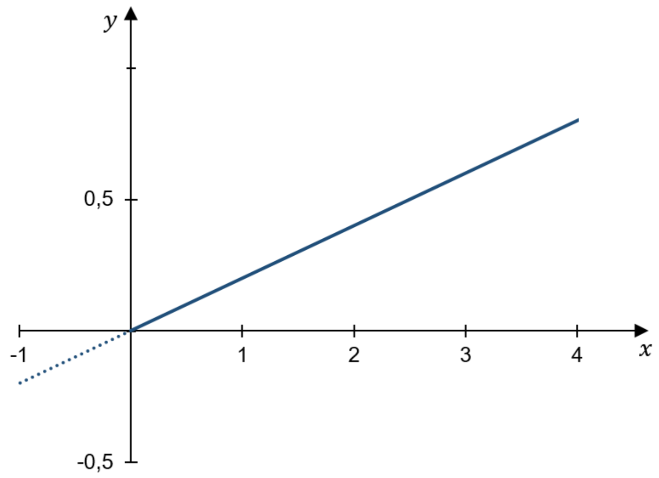


Figura 4.1 - Função quantidade de óleo de soja extraído

Fonte: Adaptada de Boldrini (1980).

Note que podemos desenhar o gráfico para valores de x menores que zero, mas tais valores não nos apresentam valor prático de informação, pois não podemos utilizar uma massa negativa de soja para extrair óleo. Logo, na Figura 4.1, o pontilhado no gráfico da função apresenta esses valores irreais.

Façamos, agora, uma breve análise dessa função:

1) Se desejarmos estimar o total de óleo que será extraído em dois processos, sendo que o primeiro processo irá utilizar uma massa x_1 de soja e o segundo uma massa x_2 de soja, o total de óleo extraído T_E será:

$$T_E = f(x_1) + f(x_2) = 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 = 0{,}2(x_1 + x_2) = f(x_1 + x_2)$$

Ou seja, basta que façamos a soma do total de soja a ser utilizado em ambos processos e aplicar esse total na função.

2) Se a quantidade de soja x_1 que usamos num processo de extração for multiplicada por um fator k, nossa extração total de óleo de soja $T_E{}'$ será:

$$T_E = f(kx_1) = 0{,}2(kx_1) = k(0{,}2x_1) = kf(x_1)$$

Ou seja, basta calcularmos a função com a massa original e multiplicar o resultado pelo fator desejado.

Essas duas análises feitas serão úteis na caracterização do que viremos a chamar de **transformação linear**.

Você já deve saber que podemos também usar matrizes e vetores para lidarmos com funções lineares. Para refrescar tais conceitos, vejamos um exemplo: uma cooperativa de extração de óleo de vegetais sabe que, ao processar 1 kg de soja e 1 kg de milho, ela produzirá 0,26 L de óleo. Já no caso de ela processar apenas 3 kg de milho, irá produzir apenas 0,18 L de óleo. Chamando a massa de soja de s e a massa de milho de m, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1s + 1y = 0{,}26 \\ 0s + 3y = 0{,}18 \end{cases}$$

Tal qual você deve se lembrar, esse sistema pode ser escrito na forma do produto de uma matriz por um vetor, resultando em um vetor:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}26 \\ 0{,}18 \end{bmatrix}$$

Podemos resolver, então, o problema de forma simples. Encontraremos que $m = 0{,}06$ e $s = 0{,}2$.

No entanto, não temos mais o interesse apenas na resolução de sistemas assim. Nosso foco agora é outro. Do problema acima, podemos gerar um caso genérico no qual podemos ter qualquer valor de algum cereal sendo processado, representado por x_i, e uma quantidade qualquer de óleo total y_i sendo produzido. Assim, para um caso genérico, o sistema acima pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Poole (2004) nos diz que a forma mostrada à direita em (3) pode ser representada de forma mais geral como:

$$\mathbf{y} = F \cdot \mathbf{x} \qquad (4)$$

Observe que a forma descrita em (4) é muito parecida com (1). Ou seja, podemos fazer uma analogia de (4) com uma função, onde o vetor **y** seria a variável dependente, o vetor **x** seria a variável independente e F identificaria a função.

Podemos analisar o problema acima de uma outra forma também, segundo Poole (2004). De um modo geral, vemos que a matriz F irá transformar um vetor de dimensão 2 em outro vetor de dimensão 2. Isso pode ser representado como $F: \Re^2 \rightarrow \Re^2$. Mas podemos ter casos diferentes do que foi exemplificado acima. Por exemplo, se tivermos a função A e o vetor arbitrário **v** das variáveis independentes como mostrado a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Encontramos a seguinte função:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 3x + 2y \\ x + y \end{bmatrix}$$

Ou seja, temos uma forma de mostrar que A transforma o vetor **v** de $\Re^2$ em um vetor de $\Re^3$. Poole (2004) ainda nos indica uma forma diferente para representarmos essa transformação T_A:

$$T_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 3x + 2y \\ x + y \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ainda com esse exemplo em mente, Poole (2004) propõe uma terminologia:

I. A **transformação** T de $\Re^n$ em $\Re^m$ nada mais é do que uma regra que atribui a cada vetor **v** de $\Re^n$um único vetor $T(\mathbf{v})$ em $\Re^m$.

II. $\Re^n$ é chamado de **domínio** de T e $\Re^m$ é o **codomínio**, sendo isso indicado por $T: \Re^n \rightarrow \Re^m$.

III. O vetor $T(\mathbf{v})$ no codomínio é chamado **imagem** do vetor **v** sob A. Já o conjunto de todas as imagens de vetores é chamado de imagem de T.

IV. Se $n = m$, ou seja, se $T: \Re^n \rightarrow \Re^n$, temos que a transformação linear T é chamada de **operador linear** em $\Re^n$.

Com essas terminologias, para o exemplo acima teremos: o domínio é $\Re^2$ e o codomínio é $\Re^3$, sendo a transformação indicada por $T_A: \Re^2 \to \Re^3$.

Exemplo 1.1: Para os vetores **u**$= (1,1)$ e **v**$= (3,2)$, determine a imagem usando a transformação indicada por (5).

Solução

Para tal, basta que façamos a substituição de x e y adequadamente. Para **u**:

$$T_A\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix}$$

E para **v**:

$$T_A\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\13\\5\end{bmatrix}$$

1.1 Transformações lineares

Agora, iremos dar uma definição formal para transformações lineares, um tópico de extrema importância para a matemática e diversas outras áreas das ciências.

Definição 1: Uma ***transformação linear*** $T: \Re^n \to \Re^m$ é uma função que irá associar cada vetor **u** de $\Re^n$ a um único vetor $T(\mathbf{u})$ em $\Re^m$ tal que:

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \boldsymbol{T}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{T}(\mathbf{v})$ para todos os vetores **u** e **v** de $\Re^n$.
2. $T(k\mathbf{u}) = \boldsymbol{kT}(\mathbf{u})$ para todo vetor **u** de $\Re^n$ e escalar k.

Exemplo 1.2: Comprove que a transformação $T: \Re^2 \to \Re^3$ definida a seguir é uma transformação linear.

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2y\\x+3y\\3x-y\end{bmatrix}$$

Solução

Precisamos provar os dois axiomas da Definição 1 para atestar que a transformação dada é uma transformação linear. Para isso, consideremos o escalar k e os seguintes vetores aleatórios:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$$

Então, para o axioma 1:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2(y_1+y_2)\\(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)\\3(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2y_1+2y_2\\x_1+3y_1+x_2+3y_2\\3x_1-y_1+3x_2-y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2y_1+2y_2\\(x_1+3y_1)+(x_2+3y_2)\\(3x_1-y_1)+(3x_2-y_2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2y_1\\(x_1+3y_1)\\(3x_1-y_1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2y_2\\(x_2+3y_2)\\(3x_2-y_2)\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right) = T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$

Agora, para o axioma 2:

$$T(k\mathbf{u}) = T\left(k\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}kx_1\\ky_1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2(ky_1)\\kx_1+3(ky_1)\\3(kx_1)-ky_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k(2y_1)\\k(x_1+3y_1)\\k(3x_1-y_1)\end{bmatrix}$$

$$= k\begin{bmatrix}2y_1\\x_1+3y_1\\3x_1-y_1\end{bmatrix} = kT\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right) = kT(\mathbf{u})$$

Como ambos axiomas foram provados, podemos afirmar que a transformação $T: \Re^2 \rightarrow \Re^3$ é uma transformação linear.

Exemplo 1.3: Comprove que a transformação $T: \Re^3 \rightarrow \Re^2$ definida como $T([x\ y\ z]) = [x\ y]$ é uma transformação linear.

Solução

Para efetuarmos essa prova, é necessário que verifiquemos a validade dos dois axiomas apresentados na Definição 1. Para isso, consideremos o escalar k e os seguintes vetores aleatórios:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}$$

Então, para o axioma 1:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}\right) = T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$

Agora, para o axioma 2:

$$T(k\mathbf{u}) = T\left(k\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = kT\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) = kT(\mathbf{u})$$

Como ambos axiomas foram provados, podemos afirmar que a transformação $T: \Re^3 \to \Re^2$ é uma transformação linear. Inclusive, como nos informa Kolman (1999), essa transformação é chamada de **projeção**, pois ela projeta um vetor tridimensional no plano cartesiano. A Figura 4.2 nos mostra o vetor **v**= $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, imagem da projeção de um vetor **u**= $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ no qual foi aplicada esta transformada linear.

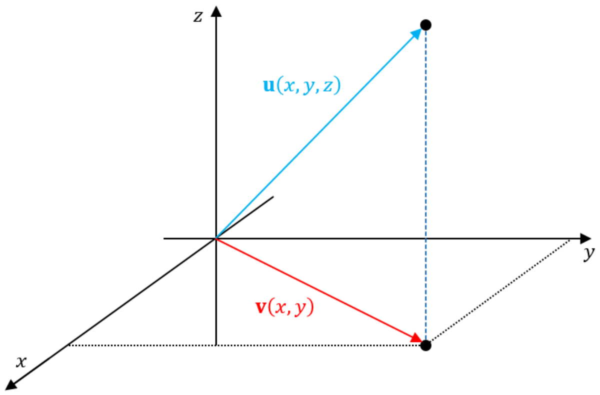


Figura 4.2 - Projeção de um vetor **u**

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 1.4: Comprove que a transformação $T: \Re^2 \to \Re^2$ definida como $T(\mathbf{v}) = a\mathbf{v}$, onde a é um número real qualquer, é uma transformação linear.

Solução

Para efetuarmos essa prova, é necessário que verifiquemos a validade dos dois axiomas apresentados na Definição 1. Para isso, consideremos o escalar k e os seguintes vetores aleatórios:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Então, para o axioma 1:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a(x_1+x_2)\\a(y_1+y_2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}ax_1+ax_2\\ay_1+ay_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax_1\\ay_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}ax_2\\ay_2\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right) = T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$

Agora, para o axioma 2:

$$T(k\mathbf{u}) = T\left(k\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}kx_1\\ky_1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a(kx_1)\\a(ky_1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k(ax_1)\\k(ay_1)\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}ax_1\\ay_1\end{bmatrix} = kT\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right) = kT(\mathbf{u})$$

Como ambos axiomas foram provados, podemos afirmar que a transformação $T: \Re^2 \to \Re^2$ é uma transformação linear. Inclusive, como nos informa Boldrini (1980), esse tipo de transformação pode ser chamada de **contração** quando temos $0 < a < 1$ ou **expansão** quando $a > 1$.

Poole (2004) mostra que a Definição 1 ainda pode ser resumida e agrupada em único axioma, no qual tem-se que a transformação linear $T: \Re^n \to \Re^m$ é uma função que irá associar cada vetor **u** de $\Re^n$ a um único vetor $T(\mathbf{u})$ em $\Re^m$ tal que:

1. $T(k_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{v}) = k_1\boldsymbol{T}(\mathbf{u}) + k_2\boldsymbol{T}(\mathbf{v})$ para todos os vetores **u** e **v** de $\Re^n$ e escalares k_1 e k_2.

Também devemos destacar que é importante que, dada uma transformação, sejamos capazes de encontrar a matriz que gera a transformação. Por exemplo, se tomarmos a transformação mostrada no Exemplo 1.2:

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2y\\x+3y\\3x-y\end{bmatrix}$$

Somos capazes de usar engenharia reversa e encontrar facilmente a matriz: note que existem duas variáveis. Logo, podemos desmembrar o vetor resultante na adição de dois vetores multiplicados por escalares e, em seguida, na multiplicação de duas matrizes:

$$\begin{bmatrix}2y\\x+3y\\3x-y\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 3\\3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

Poole (2004) indica que transformações como as obtidas anteriormente são efetivamente chamadas de transformações matriciais, ou seja:

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

No entanto, ele enuncia um teorema que liga as transformações lineares com as transformações matriciais:

Teorema 1: Seja a matriz A uma matriz $m \times n$. Então, a transformação $T_A: \Re^n \to \Re^m$ definida como $T_A(\mathbf{x}) = \boldsymbol{A}\mathbf{x}$ para todo vetor $\mathbf{x}$ de $\Re^n$ também será uma transformação linear.

Ainda sobre as transformações matriciais, Poole (2004) destaca que, ao multiplicarmos uma matriz por um vetor e_i que seja um componente da base canônica do espaço vetorial em questão, iremos sempre obter uma das colunas da matriz. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}$$

Isso nos leva a um novo teorema, de acordo com Poole (2004):

Teorema 2: Seja a transformação linear $T: \Re^n \to \Re^m$. Podemos afirmar, então, que T é uma transformação matricial T_A tal que, sendo A uma matriz $m \times n$:

$$A = [T(e_1) \vdots T(e_2) \vdots \cdots \vdots T(e_n)]$$

Essa matriz A é chamada de **matriz padrão da transformação linear $\boldsymbol{T}$**.

Vejamos alguns exemplos de como podemos utilizar isso na identificação de transformações lineares agora.

Exemplo 1.5: Comprove que a transformação $F: \Re^2 \to \Re^2$ definida como a reflexão de cada ponto no eixo x é uma transformação linear.

Solução

A reflexão de um ponto (x, y) no eixo x nada mais é do que encontrar o ponto $(x, -y)$, ou seja, mantemos o ponto fixo no eixo x e o giramos ao redor desse eixo. A Figura 4.3 nos mostra o ponto P', que é a reflexão de um ponto $P(x, y)$ no eixo x.

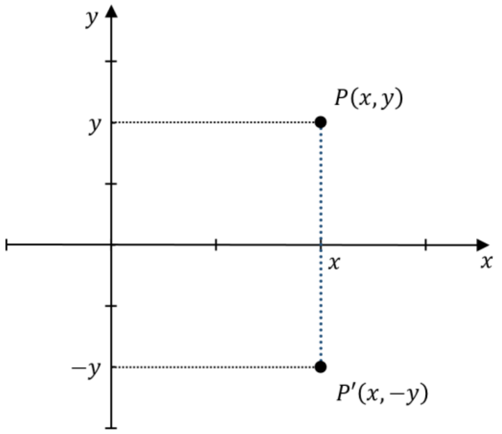


Figura 4.3 - Rotação do ponto P no eixo x

Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, podemos definir essa transformação como:

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

O mais correto para provarmos que essa transformação é uma transformação linear seria pelo mesmo procedimento do Exemplo 1.2. No entanto, veja que:

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ou seja, encontramos que

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo, pelo Teorema 1, podemos afirmar que F é uma transformação linear. Uma transformação linear semelhante a essa também pode ser aplicada em relação ao eixo y, ou seja, podemos rotacionar um ponto ao longo do eixo y, mantendo fixo sua coordenada y e encontrando uma nova coordenada $-x$ para sua coordenada inicial x. Outra transformação semelhante a essa é a reflexão na origem, onde giramos o vetor deixando sua origem fixada. Assim, um vetor **u**$= (x, y)$ seria transformado em um vetor **v**$= (-x, -y)$. Buscando sua prática nesse assunto, prove que essas transformações são transformações lineares.

Exemplo 1.6: Comprove que a transformação $T: \Re^3 \to \Re^2$ definida como $T([x\ y\ z]) = [x\ y]$ é uma transformação linear.

Solução

Logo, podemos definir essa transformação como:

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

O mais correto para provarmos que essa transformação é uma transformação linear seria pelo mesmo procedimento do Exemplo 1.2. No entanto, veja que:

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ou seja, encontramos que

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo, pelo Teorema 1, podemos afirmar que F é uma transformação linear.

ATIVIDADES

1) O assunto transformadas lineares é algo que pode ser muito útil ao lidarmos com problemas que envolvem funções e outros conceitos matemáticos. Focando na fixação dos conceitos básicos sobre as transformadas lineares, analise as alternativas a seguir e assinale a correta.

a) O conhecimento de matrizes pouco interessa ao lidarmos com transformadas lineares.

b) A transformada a seguir não é uma transformada linear.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x^2 \end{bmatrix}$$

c) A transformada a seguir é uma transformada linear.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

d) Uma transformada linear $T: \Re^n \to \Re^m$ exige sempre que n seja menor ou igual a m.

e) A transformada a seguir não é uma transformada linear.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

2. Generalizando as transformadas lineares

Após termos estudado os conceitos mais básicos das transformadas lineares, iremos nos aprofundar um pouco mais no assunto das transformadas lineares, definindo novos conceitos e ampliando aqueles que já estudamos.

A partir de agora, iremos tratar as transformações em qualquer espaço vetorial, propondo uma nova definição mais generalista, conforme Lipschutz (1994) propõe:

Definição 2: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Assim, uma ***transformação linear*** $T: V \to W$ é uma função que irá associar cada vetor $\mathbf{u}$ de V a um único vetor $T(\mathbf{u})$ em W tal que:

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \boldsymbol{T}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{T}(\mathbf{v})$ para todos os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de V, ou seja, devemos ter equivalência da adição dos vetores em V e em W.
2. $T(k\mathbf{u}) = \boldsymbol{kT}(\mathbf{u})$ para todo vetor $\mathbf{u}$ de V e escalar k, ou seja, devemos ter equivalência da multiplicação por escalar dos vetores em V e em W.

Para essa nova definição, Poole (2004) mostra que podemos incluir o Teorema 1 também, ou seja, sendo a matriz A uma matriz $m \times n$, então a transformação $T_A: \Re^n \rightarrow \Re^m$ definida como $T_A(\mathbf{x}) = \boldsymbol{A}\mathbf{x}$ para todo vetor $\mathbf{x}$ de $\Re^n$ também será uma transformação linear.

Em conjunto com essa definição geral, Kolman (1999) e Poole (2004) enunciam um teorema contendo propriedades das transformações lineares:

Teorema 3: Seja a transformação $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então:

a) $T(\mathbf{0}\text{v}) = \mathbf{0}\text{w}$, sendo $\mathbf{0}$v e $\mathbf{0}$w os vetores os vetores nulos de V e W, respectivamente
b) $T(-\mathbf{u}) = -\boldsymbol{T}(\mathbf{u})$ para todo vetor $\mathbf{u}$ de V.
c) $T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \boldsymbol{T}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{T}(\mathbf{v})$ para todos os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de V.

Complementando a Definição 2 e o Teorema 3, Lipschutz (1994) e Poole (2004) destacam duas transformações lineares especiais:

1. Para quaisquer espaços vetoriais V e W, temos uma transformação $T_0: V \rightarrow W$ que leva todos os vetores de V ao vetor nulo em W. Essa transformação é chamada de **transformação nula** e é representada por

$$T_0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

para todo $\mathbf{v} \in V$.

2. Para qualquer espaço vetorial V, temos uma transformação $I: V \rightarrow V$ que leva todos os vetores de V a si mesmo. Essa transformação é chamada de **transformação identidade** e é representada por

$$I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{v} \in V$.

2.1 Teorema do núcleo e imagem

Agora que temos uma definição mais geral das transformadas lineares, podemos também partir para uma visão mais geral da imagem de uma transformada linear. Lipschutz (1994) nos dá a seguinte definição para imagem:

Definição 2: Considere a transformação linear $T: V \to W$. A **imagem** de T, simbolizada ImT ou imagem(T), é o conjunto de pontos obtidos pela aplicação de T em todos os vetores de V, ou seja:

$$ImT = \{\mathbf{u} \in \boldsymbol{W} / \boldsymbol{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}$$

Para pensarmos um pouco sobre o tamanho da imagem de uma transformação linear, Kolman (1999) pede que retomemos os nossos conhecimentos de funções. Uma função f é uma lei que associa cada um dos valores de um conjunto V para um único elemento noutro conjunto W. No entanto, também podemos representar f numa forma tabular, onde ao lado de cada elemento de V colocaremos seu elemento associado de W. Já sabemos que podemos ver uma função como uma transformação linear. Agora, sabendo disso pode parecer impossível descrevermos uma transformação linear $T: V \to W$, visto que diversos conjuntos V podem ser infinitos. Para contornar esse problema, Kolman (1999) enuncia um teorema que nos diz que, conhecendo os valores de T em uma base de V, teremos T completamente determinada, o que torna possível descrever T partindo-se apenas da imagem de um pequeno conjunto de vetores de V:

Teorema 4: Seja a transformação $T: V \to W$ uma transformação linear de um espaço vetorial V de dimensão n num espaço vetorial W. Considerando a base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$ como uma base para o espaço V e $\mathbf{u}$ um vetor arbitrário de V, então a determinação completa de $T(\mathbf{u})$ é dada por $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$.

Além da imagem de uma transformação linear, dada a importância do espaço nulo, é útil que saibamos também qual é o núcleo da transformação linear. Lipschutz (1994) nos dá a seguinte definição:

Definição 3: Considere a transformação linear $T: V \to W$. O **núcleo** de T, simbolizado $Ker\ T$ ou $ker(T)$, é o conjunto de vetores de V que são transformados em vetores nulos de W. Ou seja:

$$ker(T) = \{\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}/\boldsymbol{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Além disso, Kolman (1999) nos diz que se $T: V \to W$ é uma transformação linear, então $ker(T)$ será um subespaço de V. Isso é facilmente checado pelo fato do núcleo de uma transformada linear ser um conjunto não nulo. Quando uma transformada linear apresenta como núcleo apenas o vetor nulo, seu núcleo é chamado de **subespaço trivial** $\{\mathbf{0}\}$.

Essas definições possibilitam que estudemos alguns tipos especiais de transformações lineares: as transformações injetoras e sobrejetoras. Sobre tais transformações, Kolman (1999) nos dá a seguinte definição:

Definição 4: Uma transformação linear $T: V \to W$ será dita **injetora** se, para quaisquer vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ de V, tenhamos $T(\mathbf{v}_1) \neq \boldsymbol{T}(\mathbf{v}_2) \neq \ldots \boldsymbol{T}(\mathbf{v}_n)$. Ou seja, T é injetora se $T(\mathbf{v}_i) \neq \boldsymbol{T}(\mathbf{v}_j)$ sempre que $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_j$.

Definição 5: Uma transformação linear $T: V \to W$ será dita **sobrejetora** se $ImT = W$.

Kolman (1999) nos diz que, se $T: V \to W$ é uma transformação linear, então ImT será um subespaço de W. Ele também enuncia que uma transformação linear $T: V \to W$ será injetora se, e somente se, $ker(T) = \{\mathbf{0}_\mathbf{v}\}$. Finalizando esse assunto, ele ainda enuncia um teorema:

Teorema 5: Seja a transformação $T: V \to W$ uma transformação linear de um espaço vetorial V de dimensão n num espaço vetorial W. Então

$$dim\big(ker(T)\big) + dim(ImT) = dim\ V$$

Sendo que $dim\big(ker(T)\big)$ também é chamada de **nulidade** de T e $dim(ImT)$ é chamada de **posto** de T.

Exemplo 1.7: Verifique se a transformação $T: \Re^2 \to \Re^2$ definida como $T([x\ y]) = [x + y\ \ x - y]$ é injetora.

Solução

Para isso, consideremos dois vetores aleatórios: **u**$= (x_1, y_1)$ e **v**$= (x_2, y_2)$. Para que esta transformação seja injetora, precisamos verificar se $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. Como a transformada gera um vetor de dimensão dois, precisamos checar a possibilidade de igualdade dos dois elementos que o compõem. Assim, o primeiro termo nos diz que:

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

E o segundo:

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2$$

Ou seja, temos um sistema. Se somarmos as duas equações que encontramos, teremos que:

$$x_1 + y_1 + x_1 - y_1 = x_2 + y_2 + x_2 - y_2$$

$$2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

Essa igualdade implica que tenhamos $y_1 = y_2$. Logo, podemos concluir que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ apenas para um vetor **u**$= (x_1, y_1)$, o que nos leva a crer que a transformada é injetora.

Exemplo 1.8: Encontre o núcleo da transformação apresentada no Exemplo 1.7.

Solução

O núcleo de uma transformação nada mais é do que o conjunto de vetores de um espaço para os quais temos $T(\mathbf{u})$ =**0**. Portanto, para encontrarmos o núcleo dessa transformação, precisamos resolver o sistema linear gerado pelos elementos de $T(\mathbf{u})$:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Se somarmos as duas equações, encontramos que $x = 0$. Logo, também temos que $y = 0$. Logo, a única solução para esse caso é **u**=**0**, ou seja, $ker(T)$ =**0**.

2.2 Transformações lineares a partir de outras transformações lineares

Tal qual ocorre em funções, é possível que tenhamos casos de uma transformada linear de uma transformada linear. Por exemplo, se $T: V \rightarrow W$ e $S: W \rightarrow P$ são transformadas lineares, então, a **composta de *S* com *T*** será definida como:

$$(S \circ T)(\mathbf{u}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}(\mathbf{u}))$$

sendo **u** um vetor de V

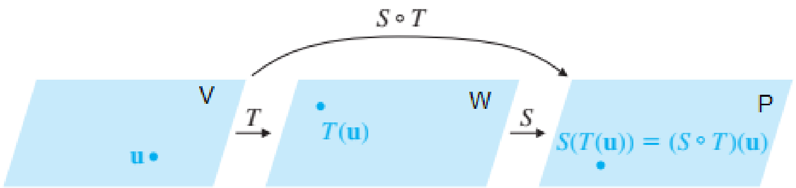


Figura 4.4 - Esquema da composta de S com T

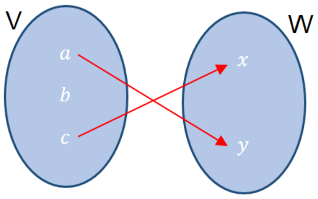
Fonte: Adaptada de Pool (2004).

Partindo dessa definição, Poole (2004) ainda afirma que, se $T: V \rightarrow W$ e $S: W \rightarrow P$ são transformadas lineares, então $S \circ T: V \rightarrow P$ também é uma transformada linear.

ATIVIDADES

2) As transformadas lineares apresentam uma vasta gama teórica, sendo que o excesso de conceitos pode nos levar a uma grande confusão. Para fixarmos melhor esses conceitos, vamos analisar as alternativas a seguir sobre esse assunto e assinalar a correta.

a) No diagrama a seguir, temos que o conjunto de flechas representa uma transformação linear $T: V \rightarrow W$.

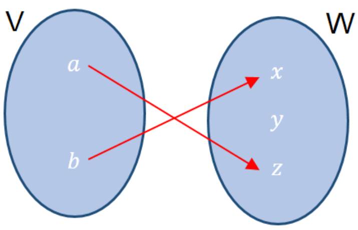


b) Se uma transformada $T: V \rightarrow W$ apresenta nulidade 1 e posto 2, a dimensão de V deve ser 3.

c) Uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ exige que todos os vetores de W tenham um correspondente em V.

d) A dimensão do núcleo de uma transformada em nada se relaciona com a dimensão do espaço vetorial onde se aplica a transformada.

e) No diagrama a seguir, temos que o conjunto de flechas não representa uma transformação linear $T: V \rightarrow W$.



3. Autovalores e autovetores

Agora que temos domínio de toda a base teórica acerca das transformações lineares, iremos estudar alguns casos especiais de aplicação das transformadas lineares. Primeiramente, pensemos no seguinte problema: dada uma transformação linear $T: V \rightarrow V$, quais vetores são levados a um múltiplo de si mesmo?

Boldrini (1980) nos diz que esse problema consiste em buscarmos um vetor **v** pertencente ao um espaço vetorial V e um escalar $\lambda \in \Re$ tal que

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

Note que o problema acima pode ser solucionado para qualquer **v** usando-se o vetor nulo, **v=0**, o que se mostra uma solução trivial. Logo, estamos realmente interessados em encontrar um **v** que seja não nulo. Nesse caso, o escalar λ será chamado de **autovalor** ou valor característico de T, enquanto o vetor **v** será chamado de **autovetor** ou vetor característico de T.

Vamos formalizar isso. A partir de agora, a transformação $T: V \rightarrow V$, ou seja, de um espaço para ele mesmo, será chamada de **operador linear**. Assim, de acordo com Boldrini (1980):

Definição 6: Seja o operador linear $T: V \rightarrow V$. Caso exista um vetor **v**$\in V$ sendo **v≠0** e um escalar $\lambda \in \Re$ tal que $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, então λ é um **autovalor** de T e o vetor **v** é um **autovetor** de T que é associado à λ.

Kolman (1999) ainda sugere uma definição para autovetores e autovalores utilizando matrizes:

Definição 7: Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Um escalar $\lambda \in \Re$ será chamado de **autovalor** de A se existir um vetor **v** não nulo em $\Re^n$ tal que:

$$A\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$$

Assim, todos os vetores **x** que satisfizerem a relação acima serão chamados de **autovetores** de A associado à λ.

Vejamos um exemplo de como podemos encontrar autovalores e autovetores.

Exemplo 1.9: Encontre os autovalores e autovetores do operador linear $T: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ definido como $T(\mathbf{u}) = I_n\mathbf{u}$.

Solução

I_n é a matriz identidade. Para essa matriz, seu único autovalor é 1 por definição. Logo, qualquer vetor **u** não nulo de $\mathfrak{R}^n$ pode ser um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$.

Exemplo 1.10: Encontre os autovalores e autovetores do operador linear $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definido como $T(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u}$.

Solução

Note que da definição do próprio operador linear conseguimos encontrar o autovalor de T como sendo 2. Agora, para encontrarmos o autovetor, consideremos o vetor genérico **u**$=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Esse operador linear pode ser escrito como:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Note que qualquer vetor na forma de **u** e não nulo satisfaz às condições para ser um autovetor.

Partindo do Exemplo 1.10, Boldrini (1980) afirma que as transformações semelhantes à utilizada em tal exemplo, ou seja, $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definido como $T(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$, apresentam de forma direta seu autovalor como sendo igual a k e seus autovetores são na forma **u**$=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Um caso interessante que podemos encontrar desse exemplo genérico é para o caso de $k = 1$, onde temos que T gera a identidade do vetor **u**.

Ele também enuncia o seguinte teorema:

Teorema 6: Seja a transformação $T: V \rightarrow V$ e um autovetor **u** associado a um autovalor λ. Logo, qualquer vetor **w**$= \boldsymbol{k}\mathbf{u}$, sendo $k \neq 0$também é um autovetor associado a λ.

REFLITA

Os autovalores e autovetores apresentam uma vasta gama de aplicações em diversos tipos de problemas, sendo muito conhecidos pelo seu uso na resolução de sistemas. Pensando computacionalmente agora, qual seria o método mais prático para empregarmos em um software visando à resolução de sistemas lineares?

3.1 Polinômio característico

Nos exemplos que fizemos anteriormente, buscamos os autovalores e autovetores nos baseando na definição de autovetores e autovalores. No entanto, esse método pode ser muito complexo de se efetuar. Assim, Boldrini (1980) sugere que busquemos um método mais prático para encontrarmos os autovalores e autovetores de uma matriz A uma quadrada de ordem n.

Para desenvolvermos essa metodologia diferente, consideremos o caso de uma matriz de ordem 3. Em tal situação, procuramos vetores **v**$\in \Re^3$ e escalares $\lambda \in \Re$ tais que

$$A\mathbf{v}= \boldsymbol{\lambda}\mathbf{v} \tag{6}$$

Boldrini (1980) destaca que, sendo I_3 a matriz identidade de ordem 3, então podemos reescrever (6) como

$$A\mathbf{v}= (\boldsymbol{\lambda I_3})\mathbf{v} \tag{7}$$

ou ainda

$$(A-\lambda \boldsymbol{I_3})\mathbf{v}=\mathbf{0} \tag{8}$$

Considerando a matriz genérica e o vetor **v** a seguir:

$$A=\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos reescrever (8) então:

$$(A-\lambda I_3)\mathbf{v}=\mathbf{0} \longrightarrow \left(\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & d & g \\ b & e-\lambda & h \\ c & f & i-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema representado por essa operação resulta num caso com três equações e três incógnitas. Logo, como Boldrini (1980) nos diz, se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, esse sistema irá apresentar uma solução única, que é a solução trivial, ou seja, $x = y = z = 0$. Como nosso interesse aqui é o cálculo de autovetores e autovalores, buscamos vetores **v** que sejam diferentes do vetor nulo. Isso implica que $(A - \lambda \boldsymbol{I_3})$ deverá ser igual a zero. Logo, devemos encontrar:

$$det\begin{bmatrix} a-\lambda & d & g \\ b & e-\lambda & h \\ c & f & i-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Lembrando-se da definição de determinante, vemos que o determinante acima será um polinômio de λ. Esse polinômio é chamado de **polinômio característico de $\boldsymbol{A}$**, de acordo com Kolman (1999). Resolvendo esse polinômio, iremos, então, encontrar os autovalores para a matriz A. Para encontrar os autovetores, basta substituir os autovalores e resolver o sistema obtido a partir de (6).

Até o momento, desenvolvemos uma linha de pensamento para o caso de uma matriz de ordem 3. Mas, como Kolman (1999) nos mostra, podemos expandir o que fizemos até aqui para matrizes de ordem n. Dessa forma, a equação (8) nos levaria à seguinte situação:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.11: Encontre os autovalores e autovetores para a matriz A abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução

Tal qual desenvolvemos, precisamos avaliar $det(A - \lambda \boldsymbol{I_3}) = 0$ para essa matriz. Assim:

$$det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Avaliando esse determinante, você encontrará o seguinte polinômio:

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$$

Note que esse polinômio pode ser reescrito como:

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = 0$$

De onde conseguimos facilmente as raízes, ou seja, $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$. Agora, devemos analisar os dois casos para encontrarmos os autovetores. Primeiro, para $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Que nos leva ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases}$$

Analisando a terceira equação, encontramos que $y = 0$. Logo, conseguimos também verificar, tanto pela primeira quanto pela segunda equação, que $x = 0$ também. Fora isso, vemos que não existe nenhuma restrição para a coordenada z. Com isso, concluímos que os autovetores associados a $\lambda = 2$ são os vetores de forma $(0,0,z)$.

Agora, para $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Que nos leva ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \\ y + 2z = 3z \end{cases}$$

Analisando a primeira e a segunda equação, encontramos que $x = -2y$. Analisando a terceira, encontramos que $z = y$. Ou seja, temos duas coordenadas em função de uma terceira. Disso, podemos concluir que os autovetores associados a $\lambda = 3$ são os vetores de forma $(-2y, y, y)$.

Kolman (1999) também nos diz que as matrizes que apresentam o 0 como único autovalor são chamadas de **matrizes singulares**.

FIQUE POR DENTRO

Autovalores e autovetores têm uma especial importância na resolução de problemas que envolvem equações diferenciais, um dos objetos centrais do estudo de cálculo e de inúmeras outras disciplinas que fazem uso desse tipo de equações. Problemas desse tipo podem ser complexos para lidar, mas um bom domínio sobre as formas de encontrarmos autovalores e autovetores pode ser de grande valia para a simplificação do processo.

Link: http://revistas.utfpr.edu.br/pb/index.php/SysScy/article/view/643/374

ATIVIDADES

3) Todos sabemos que em nossas atividades do dia a dia devemos buscar sempre as formas menos complexas para resolver nossas tarefas. Visando fixar o cálculo de autovalores pelo método dos polinômios característicos, considere as matrizes a seguir, analise as alternativas a seguir e assinale a alternativa correta.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

a) 1 é um autovalor para a matriz A.
b) 3 é um autovalor para a matriz B
c) 2 é um autovalor para a matriz B.
d) A matriz A apresenta um único autovalor.
e) A matriz B não apresenta autovalor algum.

4. Diagonalização de operadores

Agora, iremos aplicar nossos conhecimentos desenvolvidos até aqui para encontrarmos uma base de um espaço vetorial onde a matriz de um determinado operador linear seja o mais simples possível. Boldrini (1980) nos diz que o caso mais simples para isso é quando encontramos uma matriz diagonal associada a um operador.

Visando esse objetivo, Boldrini (1980) enuncia que, se um espaço vetorial V de dimensão n e um operador linear $T: V \rightarrow V$ apresentam n autovalores distintos, então B possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T. Ou seja, se formos capazes de encontrar tantos autovalores distintos quanto à dimensão do espaço, podemos garantir que existe uma base de autovetores.

4.1 Matriz diagonalizável

Buscando encontrar a tal base diagonal, vamos agora desenvolver uma outra formulação para descrever problemas de autovalores e autovetores. Para isso, precisamos do conceito de matrizes semelhantes, tal qual é definida por Kolman (1999):

Definição 8: Uma matriz B será dita uma **matriz semelhante** de uma matriz A se existir uma matriz P que seja invertível, tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

Kolman (1999) ainda destaca que essas matrizes semelhantes apresentam as seguintes propriedades:

1) Uma matriz A é semelhante a ela mesma.
2) Se uma matriz B é semelhante a uma matriz A, então a matriz A é semelhante à matriz B.
3) Se uma matriz A é semelhante a uma matriz B e a matriz B é semelhante a uma terceira matriz C, então a matriz A também é semelhante à matriz C.

Exemplo 1.12: Encontre a matriz B que seja semelhante à matriz A dada a seguir, utilizando a matriz P indicada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução

Checando primeiramente se a matriz P apresenta uma inversa, encontramos que $det(P) = 1$. Logo, ela é invertível. Agora, calculando a inversa de P, você deve encontrar:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \to P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, aplicando a definição de uma matriz semelhante:

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Agora, sabendo o que é uma matriz semelhante, Kolman (1999) e Leon (1999) definem um novo tipo de matriz:

Definição 9: Uma matriz A será dita uma **matriz diagonalizável** se ela for semelhante a uma matriz diagonal. Nessa situação, dizemos que A pode ser diagonalizada.

Kolman (1999) ainda enuncia um teorema sobre matrizes diagonalizáveis:

Teorema 7: Uma matriz quadrada A de ordem n será diagonalizável se, e somente se, apresentar n autovetores linearmente independentes, caso para o qual tem-se que A será semelhante a uma matriz diagonal D. Ou seja, teremos $P^{-1}AP = D$, sendo que os elementos não nulos de D são os autovalores de A, enquanto P será uma matriz cujas colunas são os respectivos autovetores linearmente independentes de A. Deve-se notar que a ordem dos elementos de P irá ditar a ordem dos elementos de D.

Exemplo 1.13: Considere a mesma matriz A indicada no Exemplo 1.12. Verifique se A é diagonalizável.

Solução

Primeiramente, devemos avaliar $det(A - \lambda \boldsymbol{I_2}) = 0$ para essa matriz. Assim:

$$det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Avaliando esse determinante, você encontrará o seguinte polinômio:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

As raízes para este polinômio são $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$. Devemos analisar os dois casos para encontrarmos os autovetores. Primeiro, para $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Que nos leva ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2x \\ -2x + 4y = 2y \end{cases}$$

Analisando a primeira equação, encontramos que $y = x$. Então, os autovetores associados a $\lambda = 2$ são os vetores de forma (x, x). Agora, para $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Que nos leva ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3x \\ -2x + 4y = 3y \end{cases}$$

Analisando a primeira equação, encontramos que $y = 2x$. Então, os autovetores associados a $\lambda = 3$ são os vetores de forma $(x, 2x)$. Podemos dizer que esses autovetores pertencem ao subespaço **u**$= (1,1)$ e **v**$= (1,2)$, respectivamente. Os vetores **u** e **v** são linearmente independentes (comprove como um exercício). Então, A é diagonalizável.

Podemos confirmar o Teorema 7 agora. Para os autovalores e autovetores que encontramos, teremos:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

É fácil confirmar que P é invertível e sua inversa é igual a:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Avaliando agora $P^{-1}AP$:

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Kolman (1999) ainda destaca outro teorema sobre esse assunto:

Teorema 8: Uma matriz será diagonalizável se todas as raízes de seu polinômio característico forem distintas e reais.

4.2 Forma de Jordan

Como você já deve ter imaginado, nem todos os operadores são diagonalizáveis. Boldrini (1980) cita, por exemplo, que temos casos de operadores cujo polinômio característico não apresentará raízes reais, o que o leva a não possuir autovalores nem autovetores. Esse caso pode ser resolvido se o espaço vetorial em consideração for um espaço complexo, o que fará com que o polinômio característico venha a apresentar raízes complexas.

No entanto, Boldrini (1980) ainda destaca que, mesmo considerando espaços complexos, não garantimos que todos os operadores serão diagonalizáveis. Para situações onde $T: V \rightarrow V$ for um operador linear não diagonalizável e V for um espaço vetorial complexo, Boldrini (1980) e Kolman (1999) dizem que podemos achar uma base desse espaço, tal que essa base apresente uma forma especial conhecida como **forma canônica de Jordan**. De acordo com Lipschutz (1994), essa forma apresenta-se como uma diagonal por blocos, como mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Nessa forma, o bloco diagonal é chamado de **bloco de Jordan**.

ATIVIDADES

4) As matrizes semelhantes e diagonalizáveis se mostram como uma excelente forma de trabalharmos com autovetores e autovalores reais. Buscando uma melhor fixação desses conceitos, considere as matrizes a seguir, analise as seguintes alternativas e assinale a correta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) A matriz A não é diagonalizável.

b) A matriz A é diagonalizável e apresenta como autovalores $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$ e autovetores os vetores do subespaço $(1, -1)$ e $(0,1)$.

c) A matriz A é diagonalizável e apresenta como autovalores $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$ e autovetores os vetores do subespaço $(1,1)$ e $(0,1)$.

d) A matriz B é diagonalizável.

e) A matriz B é diagonalizável e apresenta como autovalores $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$ e autovetores os vetores do subespaço $(1, -1)$ e $(0,1)$.

INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: **Álgebra**

Editora: Atual Editora

Autor: John K. Baumgart

ISBN: 8570564546

Comentário: Esse livro é muito interessante, pois visa a um conhecimento histórico de conceitos que foram trabalhados no presente material. Esse tipo de abordagem é importante para estudiosos da área compreenderem melhor sobre o desenvolvimento de conceitos.

Nome do livro: **Álgebra Linear**

Editora: Pearson

Autores: Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle

ISBN: 0074504126

Comentário: Esse livro usa uma linguagem simplificada e com diversos exemplos, focando na maximização dos conceitos teóricos sendo desenvolvidos. É um bom material de apoio para o aprendizado e prática da Álgebra Linear.

REFERÊNCIAS

- BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil, 1980.
- KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações.** São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 1999.
- LEON, S. J. **Álgebra Linear com aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**: teoria e problemas. São Paulo: Makron Books, 1994.
- POOLE, David. **Álgebra Linear**, trad. Martha Salerno Monteiro. São Paulo: Thomson, 2004.

CONCLUSÃO DO LIVRO

Prezado(a) aluno(a), chegamos ao final deste material. Se você chegou até aqui, é certo que deve ter construído uma base minimamente sólida para seus estudos futuros, que certamente irão necessitar da Álgebra Linear. E, tendo finalizado este material "no braço", aqui vai uma dica: dada às necessidades tecnológicas do mundo em que vivemos, busque um software compatível com a Álgebra Linear, como o Octave ou Matlab e reproduza este conteúdo usando linguagem de programação. Isso certamente irá melhorar seu leque de conhecimentos.

Enquanto trabalhamos por este material, nós nos embrenhamos pelos principais tópicos da Álgebra Linear. Boa parte da teoria que vimos neste material pode ser classificada como pesada, tendo exigido uma boa dose de disciplina e abstração por parte de você, estudante, para compreender e fixar os tópicos visitados. Esse ponto pode fazer com que você tenha achado esta disciplina um pouco mais difícil do que o normal, mas uma boa prática certamente lhe levará à perfeição nesta área.

Revisando o que discutimos aqui, o primeiro tópico sobre o qual conversamos foi matrizes. As matrizes são o cerne da Álgebra Linear e por isso, devemos ter um exímio domínio sobre este assunto. Ou seja, devemos saber classificar as matrizes, realizar uma vasta gama de operações que envolvem as matrizes e identificar algumas características inerentes a cada matriz, como a existência de uma inversa e como podemos identificar seu determinante.

Fundamentada essa introdução altamente teórica, partimos para a aplicação das matrizes de uma forma mais prática, numa das principais áreas da Álgebra Linear: a resolução de sistemas lineares. Sistemas lineares são um tipo de problema que pode surgir quando lidamos com qualquer área da ciência, sendo um dos mais comuns tipos de problemas que encontramos no dia a dia acadêmico. Logo, precisamos saber uma forma prática de manipular e resolver estes problemas - e uma forma muito prática de atingirmos isso, como vimos, é pelo uso de matrizes e da álgebra matricial.

Fechada essa parte mais introdutória, nós focamos os nossos estudos em um tipo especial de matriz, conhecido como vetor. Os vetores são algo que fazemos uso desde o ensino médio, principalmente ao trabalharmos com a física. Além de estudarmos o comportamento individual dos vetores estudamos como podemos analisar um conjunto de vetores, vendo como podemos verificar se um vetor pode ser encontrado como combinação de outros vetores e até mesmo como identificar um pequeno grupo de vetores, que sejam capazes de gerar uma infinidade de outros vetores, num procedimento conhecido como identificação da base de um espaço vetorial.

Na parte final de nosso material, demos uma "roupagem nova" a assuntos que já havíamos discutido anteriormente. A base do tópico final deste material foram as transformações lineares, ou seja, uma lei que leva todos os elementos de um conjunto para outro conjunto. Essa definição, tal qual estudamos, é muito parecida com a definição de funções da matemática; logo, partindo disso, fizemos um paralelo simples entre funções e transformadas lineares, aprimorando a aplicabilidade do que estudamos até aqui. Finalizando, estudamos autovetores e autovalores, duas características que nos auxiliam nos estudos de transformações lineares.

Mas, e agora? Não voltaremos a usar este material? Você deve ter em mente que a Álgebra Linear nos fornece conceitos e técnicas muito importantes para lidarmos com uma vasta gama de problemas. Então, busque sempre ter em mãos algum material para ser usado como referência básica e, sempre que possível, pratique o que você aprendeu aqui. Você certamente verá muito do que discutimos aqui em diversas outras disciplinas.

Agora que fechamos este material, esperamos ter lhe fornecido uma boa e sólida base da Álgebra Linear, para que você, estudante, possa aprimorar e desenvolver uma série de novas habilidades. Agradeço a escolha do material e espero que parte do conhecimento partilhado com você por meio deste livro seja bem aproveitado, contribuindo para o seu desenvolvimento pessoal e profissional.