

Mecânica e Resistência de Materiais

Julio Cesar Agreira Pastoril

Helena Aparecida Guimarães Brito de Araujo

Kauê Cabrera Rosalem

INFORMAÇÕES SOBRE O AUTOR

Julio Cesar Agreira Pastoril

- Graduação em Física, pela Universidade Estadual de Maringá (UEM, 2012).
- Mestrado em Física, pela Universidade Estadual de Maringá (UEM, 2015).

Sobre o Autor

Possui graduação em Física pela Universidade Estadual de Maringá (2012), mestrado em Física pela Universidade Estadual de Maringá (2015). Atualmente, é estudante de doutorado na Universidade Estadual de Maringá.

Helena Aparecida Guimarães Brito de Araujo

- Mestrado em Física da Matéria Condensada pela Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP, 2015).
- Licenciatura em Física pela Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP, 2012).

Sobre o Autor

Formada no curso de Licenciatura em Física pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) - Campus de Ilha Solteira. Durante a graduação, trabalhou em: Laboratório de Física Itinerante; Caracterização de filmes finos Sr1-xBaxNb2O6 (SBN); Exploratório da Ciência e Tecnologia de Energia; Tecnologia aplicada à educação; História e Filosofia da Ciência. É mestra pelo Programa de Pós-Graduação da UNESP de Ilha Solteira, na área de Ciência dos Materiais, com ênfase em síntese e caracterização de matrizes híbridas nanoestruturadas para aplicação em sistemas de liberação controlada. É participante do Grupo de Compósitos e Nanocompósitos Híbridos (GCNH). Atualmente, é tutora e elaboradora de materiais didáticos de cursos de Educação a Distância a nível de pós-graduação e professora regente de Física no Ensino Médio.

Kauê Cabrera Rosalem

- Doutorado em Ciências na área de Física de Plasmas pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA, 2016).
- Mestrado em Ciências de Fusão Nuclear e Engenharia Física pelo programa europeu Erasmus Mundus (2011), com revalidação de diploma pela Universidade de São Paulo (USP, 2014).
- Licenciatura em Física pela Universidade Estadual Paulista (UNESP, 2008).

Sobre o Autor

Realizou estágio de docência durante o doutorado nos cursos de graduação do ITA. Desenvolveu trabalho de extensão universitária no ensino de ciências pela UNESP. Atuou como docente de física nos níveis de Ensino Fundamental e Médio. Tem experiência com pesquisas acadêmicas e científicas nas áreas de física de plasmas, física dos fluidos e descargas elétricas. Atualmente, é professor *on-line*, tutor, conteudista de disciplinas de EaD e coordenador de cursos na área de ciências exatas.

INTRODUÇÃO DO LIVRO

Na disciplina Mecânica e Resistência dos Materiais, estudaremos as propriedades mecânicas dos materiais e a capacidade que estes apresentam em resistir a uma determinada força sobre eles aplicada, devido aos usos científicos e tecnológicos e aos processos de fabricação. Diversos materiais são manipulados com o intuito de alterar suas propriedades, por exemplo, a deformação que apresentam sob forças de torção. Entretanto essas alterações podem implicar perdas de outras propriedades mecânicas. Logo, é de fundamental importância o conhecimento das características específicas que um material pode apresentar.

O conhecimento das propriedades dos materiais vem desde a antiguidade, com as construções de pirâmides pelos egípcios. Aplicações do uso dos materiais foram aprimoradas com estudos de Arquimedes, ao desenvolver estruturas como guinchos e guindastes. Os romanos, por sua vez, se destacaram com a criação de monumentos, templos e estradas, por meio de minerais de alta resistência mecânica. Na idade média, Leonardo da Vinci e Galileu Galilei introduziram conceitos e métodos científicos que fazem parte dos fundamentos dessa ciência. Outras teorias e leis físicas, que serão fundamentais nesta disciplina, foram introduzidas por análises quantitativas e qualitativas propostas por diversos estudiosos, como: Newton, Saint Venant, Bernoulli, Navier, Hooke, Poisson, Cauchy, Euler, Castigliano, Tresca, Von Mises, Lamé, dentre outros. Ainda hoje, podemos dizer que a ciência de materiais é uma área em constante descoberta e de novas aplicações.

Dentre os objetivos desta disciplina, temos: determinar os esforços quando cargas externas são aplicadas a um corpo deformável; determinar a intensidade das forças internas que atuam no corpo; calcular as deformações do corpo e o estudo de sua estabilidade; determinar as tensões e as deformações a que estão sujeitos os corpos sólidos devido à ação dos esforços atuantes; equilibrar um corpo deformável; verificar a segurança que um material pode apresentar de acordo com a sua aplicabilidade; dimensionar e analisar as propriedades mecânicas de corpos sólidos e deformáveis.

O material desta disciplina está estruturado em quatro unidades, de forma a facilitar o nível de compreensão do conteúdo e a organização do estudante. Na primeira unidade, estudaremos a estática e o equilíbrio dos corpos rígidos. Na segunda unidade, realizaremos análises de estruturas e de forças que são aplicadas em vigas e cabos. Na terceira unidade, estudaremos a distribuição de forças pelos conceitos de centroides, baricentros e momento de inércia. Por fim, na quarta unidade, analisaremos as consequências de cargas axiais, de forças de torção, de flexão e de cisalhamento transversal.

UNIDADE I

Mecânica e Resistência dos Materiais

Julio Cesar Agreira Pastori

Introdução

A mecânica é um ramo da física presente na maior parte das engenharias. O objetivo central e fundamental de compreender um pouco mais sobre a mecânica na engenharia é poder desenvolver a capacidade de prever os efeitos de forças e movimentos, quando houver, ao desempenhar as funções criativas de um projeto.

Nesse contexto, esta disciplina aborda conceitos importantes do ramo da mecânica, em especial, sobre a estática. A estática é o estudo dos corpos em repouso ou movimento retilíneo e uniforme, e para que o corpo esteja em um desses estados, algumas condições devem ser satisfeitas, as quais vamos estudar nesta unidade.

No tópico I, serão abordados conceitos de grandezas física e unidades de medidas. No tópico II, vamos fazer uma breve revisão sobre vetores e o estudo sobre equilíbrio de um ponto material. Além da definição de ponto material, também buscamos explorar as condições de equilíbrio. No tópico III, será introduzido o conceito de corpos rígidos, as definições sobre forças interna e externa, o princípio da transmissibilidade e o teorema de Virignon, além dos conceitos de momento angular sobre um ponto P. No tópico IV, será tratado sobre o equilíbrio de corpos rígidos em duas e três dimensões.



Fonte: Genro (2014, on-line).

Sistemas de Unidades

Neste tópico, trataremos do sistema de unidades a ser utilizado na magnitude das grandezas físicas dos processos mecânicos. Diversos sistemas de unidades são utilizados para expressar dimensões, logo há a necessidade de se definir corretamente os processos numéricos de conversão de unidades.

Em virtude dos diversos sistemas de unidades que são utilizados em ambientes industriais, comerciais, laboratoriais, residenciais, dentre outros, utiliza-se o sistema definido internacionalmente pela Conferência Geral de Pesos e Medidas: o Sistema Internacional de Unidades, representado pela sigla SI. Nesse sistema, temos as seguintes unidades básicas:

- a) comprimento em metro [m];
- b) massa em quilograma [kg];
- c) tempo em segundos [s];
- d) temperatura em Kelvin [K];
- e) corrente em Ampère [A];
- f) quantidade de matéria em mole [mol];
- g) intensidade luminosa em candela [cd].

As demais unidades podem ser obtidas por meio dessas unidades de medidas, e são classificadas como unidades derivadas, por exemplo, trabalho em Joule [J], potência em Watt [W] etc.

Na física, definimos como dimensão a quantidade física utilizada para qualificar uma propriedade que pode ser medida ou observada, por exemplo, comprimento, massa, tempo, temperatura, corrente, quantidade de matéria, intensidade luminosa etc. Já as unidades são definidas por nomes arbitrários, atribuídos às dimensões e acompanhados por valores numéricos, por exemplo, metro, quilograma, segundos, Kelvin, Ampère, mole, candela etc. No Quadro 1.1, estão apresentadas algumas grandezas físicas e as unidades derivadas no sistema internacional de unidades (SI).

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo da Unidade
superfície	metro quadrado	m ²
volume	metro cúbico	m ³
velocidade	metro por segundo	m/s
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s ²
número de ondas	metro elevado à potência menos um	m ⁻¹
massa específica	quilograma por metro cúbico	kg/m ³
volume específico	metro cúbico por quilograma	m ³ /kg
densidade de corrente	ampère por metro quadrado	A/m ²
campo magnético	ampère por metro	A/m

Quadro 1.1 - Grandezas físicas e as unidades derivadas no sistema internacional de unidades (SI)

Fonte: Adaptado de Inmetro (BRASIL, *on-line*).

Em algumas situações, como aplicações industriais e comerciais, utilizam-se diferentes sistemas de unidades, conhecidas por Unidades de Engenharia. No Quadro 1.2, são apresentados exemplos de Unidades de Engenharia e sua correspondência com o SI.

Grandeza	Nome	Símbolo	Expressão em outras unidades	Expressão em unidades base
pressão	Pascal	Pa	N/m ²	m ⁻¹ .kg.s ⁻²
energia	Joule	J	N.m	m ² .kg.s ⁻²
potência	Watt	W	J/s	m ² .kg.s ⁻³
força eletromotriz	Volt	V	W/A	m ² .kg.s ⁻³ .A ⁻¹
capacidade elétrica	Farad	F	C/V	m ⁻² .kg ⁻¹ .s ⁴ .A ²

resistência elétrica	Ohm	Ω	V/A	$m^2.kg^{-1}.s^{-3}.A^{-2}$
condutância elétrica	Siemens	S	A/V	$m^{-2}.kg^{-1}.s^3.A^2$
indutância magnética	Tesla	T	Wb/m ²	$kg.s^{-2}.A^{-1}$

Quadro 1.2 - Exemplos de Unidades de Engenharia e sua correspondência com o SI

Fonte: Adaptado de Inmetro (BRASIL, *on-line*).

Um sistema de unidades muito utilizado na área da mecânica é o CGS. Este se baseia em três dimensões e suas unidades básicas: dimensões em centímetro; massa em grama; tempo em segundo. Já no setor automobilístico, utiliza-se o Sistema Inglês de Unidades, com diferenças de unidades de acordo com cada país que o emprega, por exemplo, o pé inglês é maior que o pé americano. Logo, para melhor compreensão dessas unidades e uma eficiente comunicação, encontra-se, na Tabela 1.1, uma relação de coeficientes de conversão para diversas grandezas físicas.

Outro aspecto fundamental, utilizado na escrita de grandezas físicas com magnitudes muito grandes, é o uso de prefixos de unidades, os quais designam múltiplos e submúltiplos de uma determinada magnitude. Veja na tabela a seguir os prefixos, simbologias e fator multiplicador.

Prefixo	Símbolo	Fator multiplicador
exa	E	1.000.000.000.000.000.000
peta	P	1.000.000.000.000.000
terá	T	1.000.000.000.000
giga	G	1.000.000.000
mega	M	1.000.000
quilo	k	1.000
hecto	h	100
deca	da	10
deci	d	0,1

centi	c	0,01
mili	m	0,001
micro	μ	0,000 001
nano	n	0,000 000 001
pico	p	0,000 000 000 001
femto	f	0,000 000 000 000 001
atto	a	0,000 000 000 000 000 001

Tabela 1.1 - Prefixos, simbologias e fator multiplicador

Fonte: Adaptado de IPEM-SP (SÃO PAULO, *on-line*).

Compreender as grandezas físicas bem como as respectivas unidades de grandeza e saber relacioná-las com as unidades do SI (Sistema Internacional de Medidas) são de grande importância para o conteúdo que vem a seguir.

ATIVIDADES

1) Qualquer número usado para descrever quantitativamente um fenômeno físico é uma grandeza física. Ao medir uma grandeza, sempre a comparamos com um padrão de referência. Tal padrão define uma unidade de grandeza, como, por exemplo, o metro, que é uma unidade de distância, e segundo, que é uma unidade de tempo. No mundo, as medidas de referência seguem o Sistema Internacional, ou SI (das iniciais do francês *Système International*). Nesse contexto, assinale a alternativa correta.

- A unidade de temperatura no Sistema Internacional é o °C (graus Celsius).
- Usando a definição de que 1 milha = 1,61 km, no SI, 5 milhas é igual a, aproximadamente, 8 km.
- Para controlar o seu consumo de bebida alcoólica, você resolveu beber 0,04 m³ de vinho durante um ano. Supondo o ano tendo 365 dias, você não poderá beber mais que 110cm³/dia.
- Newtons por metro cúbico, ou seja, força sobre volume é unidade de pressão.
- O fluxo sanguíneo de um homem adulto é, em média, 2 litros por minuto, ou seja, uma ordem de 10³ litros por dia.

Estática dos Pontos Materiais

Antes de adentrarmos nos conceitos físicos sobre estática, uma revisão bastante sólida sobre vetores é necessária. Faremos operações com vetores, analisando sentido e direção da força resultante etc.

Vetores

Para dar início ao estudo sobre vetores e utilizando nossos conhecimentos básicos de física, vejamos um exemplo.

Pai e filho, sentados em uma lanchonete, falam sobre a física e o movimento dos corpos, quando o pai pergunta para o filho:

- Filho, se dois carros estiverem viajando, um com velocidade de 100 km/h e o outro com velocidade de 120 km/h, você consegue me dizer se eles irão bater em algum momento?

O filho, bastante atento às suas aulas de física, percebe que está faltando informação fornecida pelo seu pai, uma vez que não sabemos em que sentido e em que direção os carros estão se movimentando. É exatamente nesse ponto que encontramos uma das muitas aplicações sobre vetores.

Um vetor possui:

- **módulo** (ou intensidade): é o comprimento do vetor. A intensidade da grandeza e o impacto que ele causa na natureza. O módulo é, por definição, um número positivo.
- **direção**: é a reta associada à “seta” que une dois pontos. Se tomarmos como exemplo o plano, teríamos a reta horizontal, reta vertical e diagonal ou eixo x, eixo y e eixo z.
- **sentido**: é para onde a ponta de “seta” está direcionada. Cada direção possui sempre dois sentidos: esquerda ou direita, norte ou sul, leste ou oeste, positivo ou negativo etc.

Vetores Unitários

Também conhecidos como versores, os vetores unitários são caracterizados por apresentarem comprimento, ou módulo, igual a uma unidade. Esse vetor tem como principal objetivo indicar o sentido e a direção de uma grandeza vetorial. Por exemplo, ao associar ao eixo x um vetor unitário \hat{i} , que representa a mesma orientação do eixo, assim como para o eixo y um vetor unitário \hat{j} (“jota” chapéu), componentes de um vetor projetado em x e y, respectivamente, como na Figura 1.1.

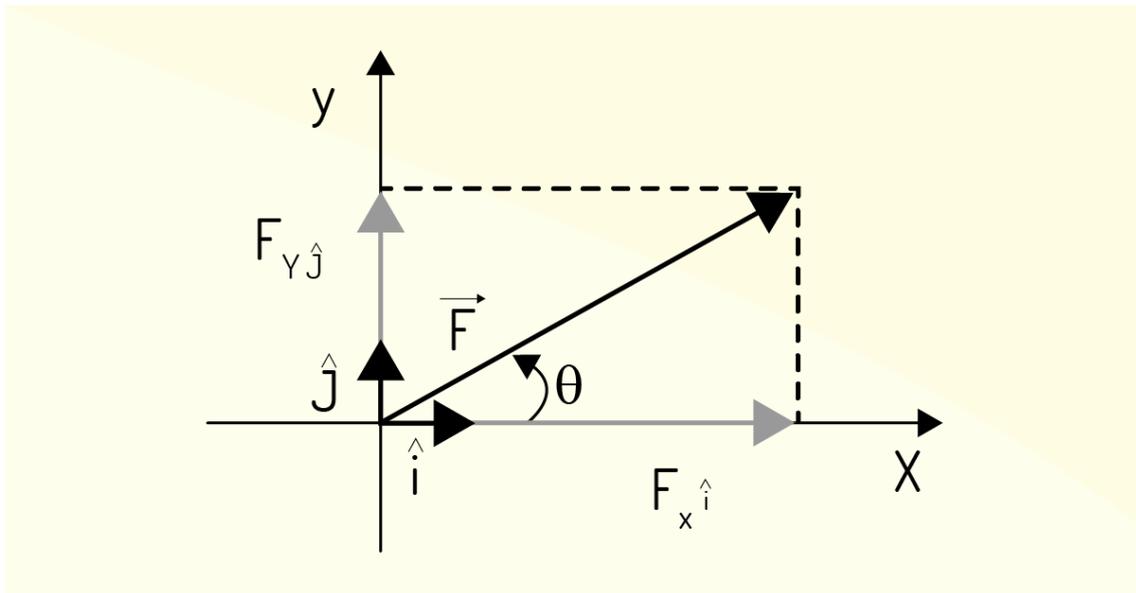


Figura 1.1 - O vetor F decomposto sobre os eixos x e y , e os versores unitário i e j

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, vamos associar os vetores unitários a suas respectivas componentes vetoriais, conforme descrito a seguir:

$$\begin{aligned}\vec{F}_x &= F \hat{i} \\ \vec{F}_y &= F \hat{j}\end{aligned}$$

Componentes de um Vetor

Muitas vezes, nos deparamos com vetores que não estão sobre os eixos, x e y , no caso \mathbf{R}^2 , vetores que estão no plano xy . Nesse caso, é necessário fazer uso de uma técnica bastante simples. Esse é o método das *componentes* vetoriais, que são encontradas a partir da decomposição de um vetor, ou seja, encontrando as projeções sobre os eixos x e y .

Para encontrar as componentes de um vetor F , primeiramente, é preciso utilizar um sistema de coordenadas (sistema cartesiano, por exemplo) e esboçar o vetor, como na Figura 1.2.

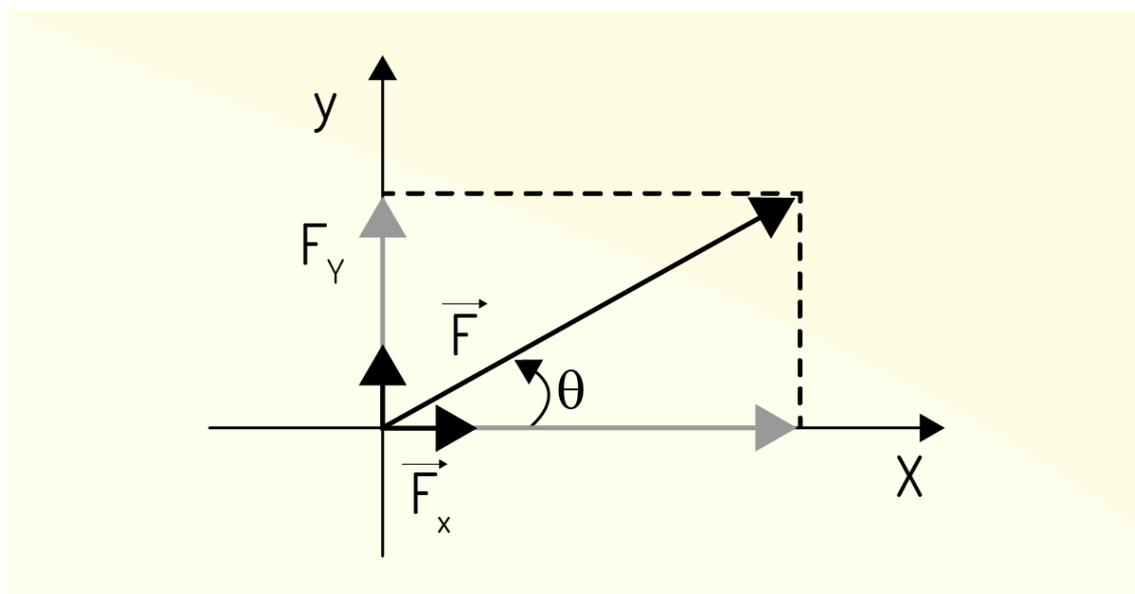


Figura 1.2 - O vetor F projetado sobre os eixos x e y com as coordenadas F_x e F_y , respectivamente
 Fonte: Elaborada pelo autor.

Os vetores F_x e F_y são denominados de componentes do vetor F sobre os respectivos eixos ou projeção do vetor F sobre os eixos. A relação entre os vetores F e suas projeções pode ser expressa da seguinte forma:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

A direção de cada componente do vetor F é dada pela direção do eixo de coordenadas. Com isso, basta um número para descrever cada componente e os vetores i e j , vetores unitários indicando a direção e o sentido.

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

Os números F_x e F_y são as intensidades das projeções sobre os eixos x e y , ou seja, um número. Na representação anterior, eles não são vetores.

Agora, vamos dar um passo a mais, descrevendo as componentes em relação ao ângulo que o vetor resultante faz com a horizontal. Como mostrado na Figura 1.2, o eixo x é o eixo de referência, e o ângulo que o vetor F faz com o sentido positivo do eixo de referência é θ . Usando conceitos de trigonometria, supondo uma rotação no sentido do eixo x para o eixo y para o ângulo θ , encontramos as equações a seguir:

$$\frac{F_x}{F} = \cos \theta$$

$$\frac{F_y}{F} = \sin \theta$$

Agora, ao escrevermos as componentes F_x e F_y em função do vetor \mathbf{F} e do ângulo θ , encontramos:

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

Fique ligado(a)! As equações encontradas anteriormente são válidas quando levamos em conta o ângulo mencionado. Se o ângulo do vetor resultante for medido considerando o eixo de referência e outro sentido de rotação, as relações podem ser diferentes.

Veja um exemplo para fixação: Um carro se desloca por 5 km na direção nordeste. A reta que liga a origem até o ponto de destino faz um ângulo de 30° com a horizontal. Dessa forma, determine qual foi o deslocamento relativo entre o eixo x e y.

Solução: basta calcular as componentes x e y do vetor deslocamento. O ângulo formado entre o vetor \mathbf{D} e sentido positivo do eixo x é 30° , com isso, montamos as equações a seguir:

$$D_x = D \cos \theta$$

$$D_y = D \sin \theta$$

Substituindo os valores na expressão, obtemos:

$$D_x = 5 \cos 30^\circ$$

$$D_y = 5 \sin 30^\circ$$

Logo, $D_x = 4,3\text{Km}$ e $D_y = 2,5\text{ Km}$

Encontrando o Módulo de F a Partir das Componentes

Agora, nos deparamos com uma situação inversa, escrever um vetor F desconhecido a partir das componentes sobre os eixos x e y . Para isso, basta usar a regra do paralelogramo, na qual a diagonal é o vetor resultante. Projetando a componente F_y , nos deparamos com um triângulo retângulo onde os catetos são as componentes x e y , e a hipotenusa é o próprio vetor F . A imagem pode ser vista na Figura 1.3.

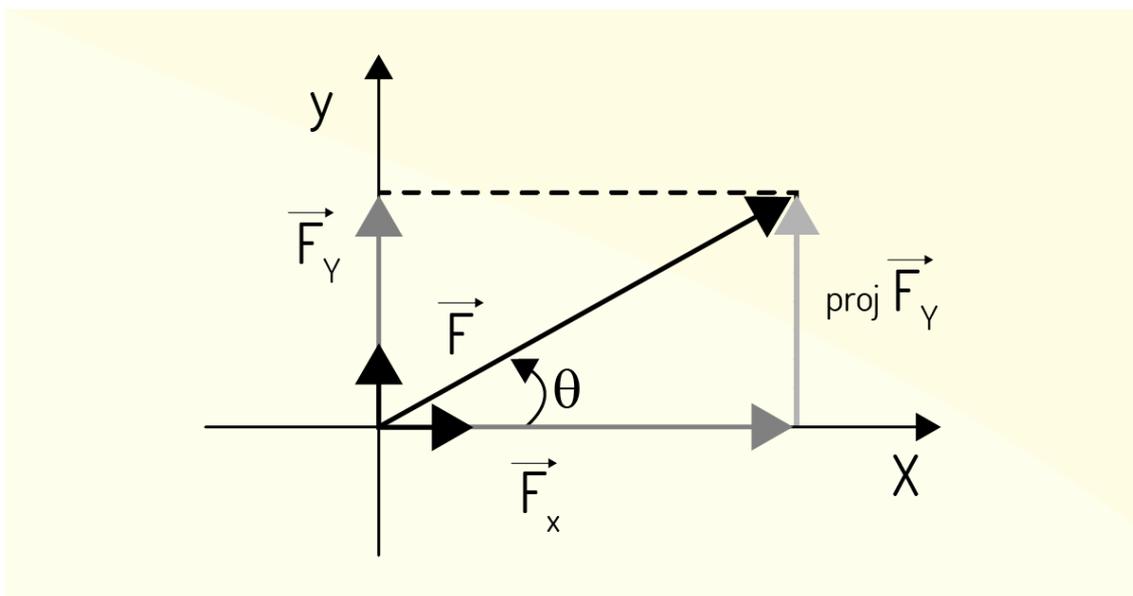


Figura 1.3 - Triângulo retângulo formado entre as componentes x e y , e o vetor resultante F

Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos o módulo do vetor F da seguinte forma:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Como estamos procurando apenas o módulo, a intensidade do vetor F , devemos considerar apenas o sinal positivo da raiz, pois um comprimento negativo não faz sentido fisicamente.

Depois de obter o módulo de F , vamos encontrar as outras informações que estão faltando do vetor, a direção e o sentido. A direção e o sentido podem ser facilmente encontradas utilizando a definição da tangente do ângulo, como na equação a seguir.

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x}$$

Para o ângulo θ , basta encontrar o arco tangente da razão F_Y / F_X . Agora, temos todas as informações sobre o vetor, seu tamanho e para onde a seta aponta, ou seja, o ângulo em relação ao eixo x (eixo de referência).

Introdução À Estática dos Corpos

Como o próprio nome sugere, estática é uma área da física que se preocupa em estudar as propriedades associadas ao equilíbrio de corpos. O estudo de equilíbrio dos corpos é de grande relevância para as engenharias, haja vista que as estruturas construídas devam ser seguras. Tomando a engenharia civil como exemplo, um engenheiro projetista deve identificar todas as forças e torques externos que possam atuar sobre a estrutura. A partir daí, fazer uma boa e adequada escolha dos materiais, a fim de garantir que a estrutura resista às cargas nela aplicadas. Tais análises são necessárias para garantir que um edifício não irá desabar, que uma ponte não cairá sob a ação de fortes ventos e do intenso tráfego de veículos, que um trem de pouso de uma aeronave suporte os choques de uma aterrissagem mal executada etc.

Equilíbrio de um Ponto Material

Alguns objetos apresentam dimensões que podem ser desprezadas em relação às intensidades das forças que atuam sobre eles. Nesse caso, o objeto é denominado de ponto material (ou partícula). Ao recorrer a segunda lei de Newton, escrita como segue,

$$\sum F = m \cdot a$$

Um ponto material estará em equilíbrio, ou seja, a aceleração resultante sob uma partícula é zero, em um sistema de referencial, quando a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre a partícula é igual a zero, como pode ser visto na equação:

$$\sum F = 0$$

A equação é suficiente para garantir o equilíbrio de um ponto material. Logo, como o conjunto de forças satisfaz a condição anterior, a expressão $m \cdot a = 0$ é verificada e, portanto, a aceleração do ponto material precisa ser igual a zero. Resumindo, o equilíbrio de um ponto material é observado nos casos em que ele encontra-se em repouso ou movendo-se com velocidade constante (MRU). Um passo importante para ter êxito nos cálculos é realizar uma boa ilustração das forças aplicadas sobre o corpo ou um diagrama de corpo livre.

Diagrama de Corpo Livre

Entender o que é um diagrama de corpo livre é bastante simples. Tomando um ponto material como a representação de um corpo, já discutido anteriormente, devemos considerar todas as forças que estão agindo sobre esse corpo. O diagrama é apenas um esboço que ilustra o ponto material livre de seu entorno com todas as forças que atuam sobre ele e, para construir o diagrama de corpo livre, basta seguir alguns passos: i) desenhar o contorno do ponto material a ser estudado, imaginando-o isolado; ii) indicar nesse esboço todas as forças que atuam sobre o ponto material; iii) as forças já conhecidas devem ser indicadas com suas intensidades (quando houver), sentido e direção. Veja um exemplo indicado na Figura 1.4.

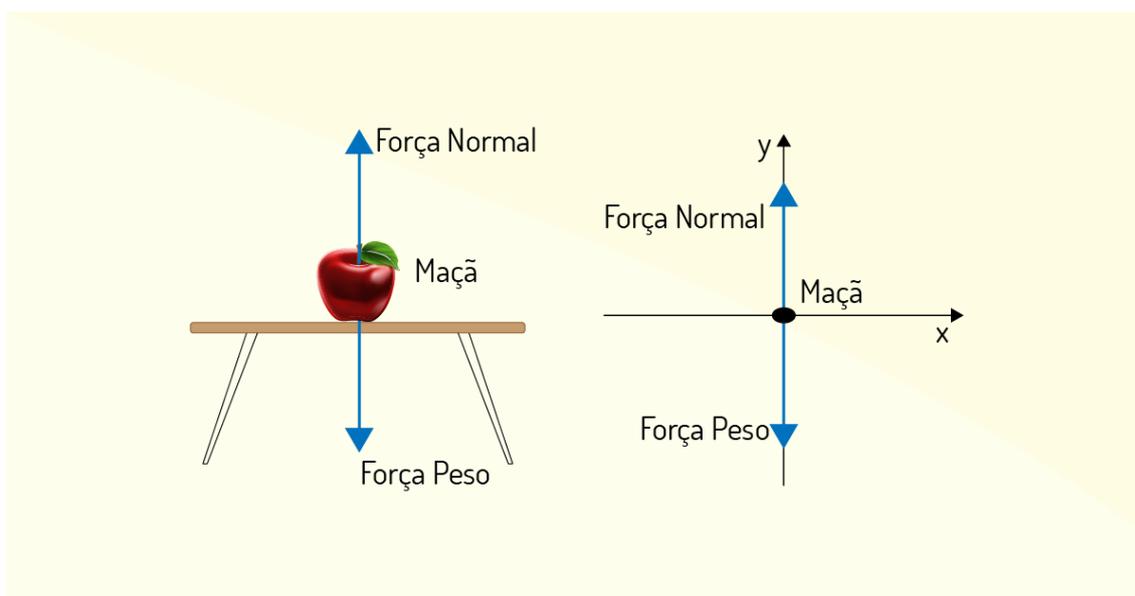


Figura 1.4 - Diagrama de corpo livre das forças que atuam sobre uma maçã que se encontra em cima de uma mesa

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após uma revisão sobre vetores e a sintetização de conceitos sobre as condições de equilíbrio de um ponto material e o uso do diagrama de corpos livres, podemos aplicar tudo isso em um mesmo contexto.

Veja um exemplo para fixação. Na Figura 1.5, o motor de um carro, de massa igual a 380 kg, é pendurado e encontra-se em equilíbrio. Determine as trações nas cordas AB e AD.

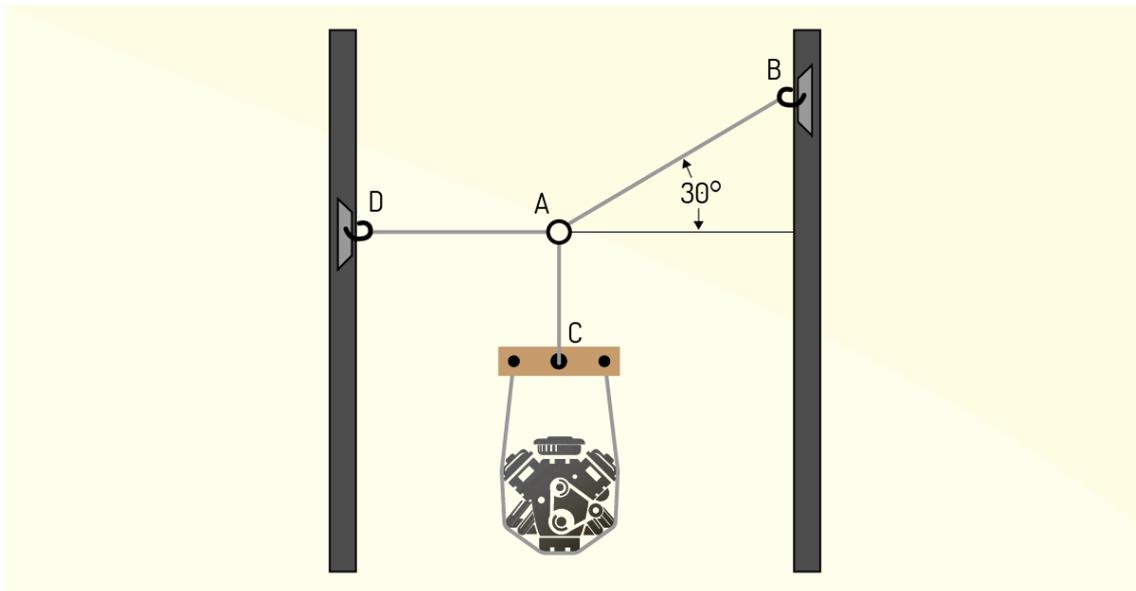


Figura 1.5 - Esquema ilustrativo de um motor pendurado por três cordas
 Fonte: Hibbler (2010, p. 73).

O primeiro passo para resolver um problema como esse é ilustrar o diagrama de forças livres:

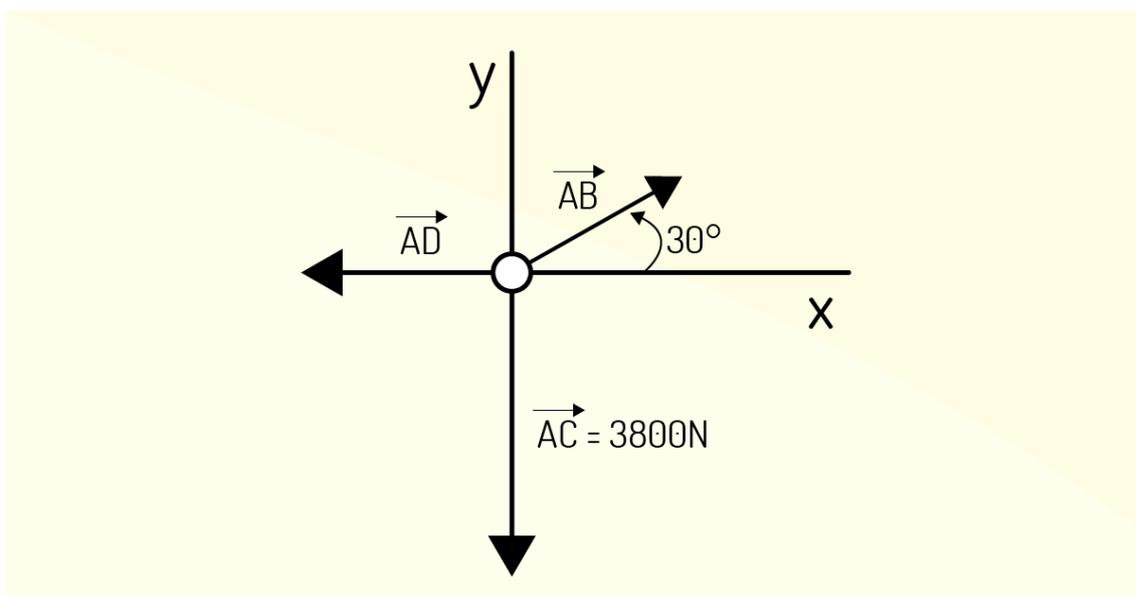


Figura 1.6 - Ilustração do diagrama de forças livres
 Fonte: Elaborada pelo autor.

As duas incógnitas **AB** e **AD** são encontradas aplicando a condição de equilíbrio para um ponto material:

$$\sum F_X = 0 \text{ e } \sum F_Y = 0$$

Da somatória das forças para o eixo x, obtemos:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow T_{AD} - T_{AB} (\text{componente } x) = 0$$

$$T_{AD} - T_{AB} \cos 30^\circ = 0$$

$$T_{AD} = 0,86 T_{AB}$$

Agora, para a somatória das forças sobre o eixo y, teremos:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AC} - T_{AB} (\text{componente } y) = 0$$

$$T_{AC} - T_{AB} \sin 30^\circ = 0$$

Substituindo o valor de T_{AC} , obtemos:

$$3800 = 0,5 T_{AB}$$

Logo, $T_{AB} = 7200 \text{ N}$.

Substituindo T_{AB} para encontrar o valor de T_{AD} :

$$T_{AD} = 0,86 (7200)$$

$$T_{AD} = 6235,4 \text{ N}$$

Fundamentado no princípio da inércia (1ª Lei de Newton), podemos concluir que uma partícula em equilíbrio pode se encontrar em duas situações: em repouso (equilíbrio estático) ou em movimento retilíneo e uniforme (equilíbrio dinâmico).

Vejamos outro exemplo.

Ana, Bianca, Camila e Daniela estão brincando de cabo de guerra com um pneu, como ilustrado na Figura 1.7. Sabe-se que a força de Ana (F_A) é de 120 N e de Camila (F_C) é de 40 N. (Dados $\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$). Se o sistema está em equilíbrio, qual o valor das forças da Bianca e da Daniela, respectivamente.

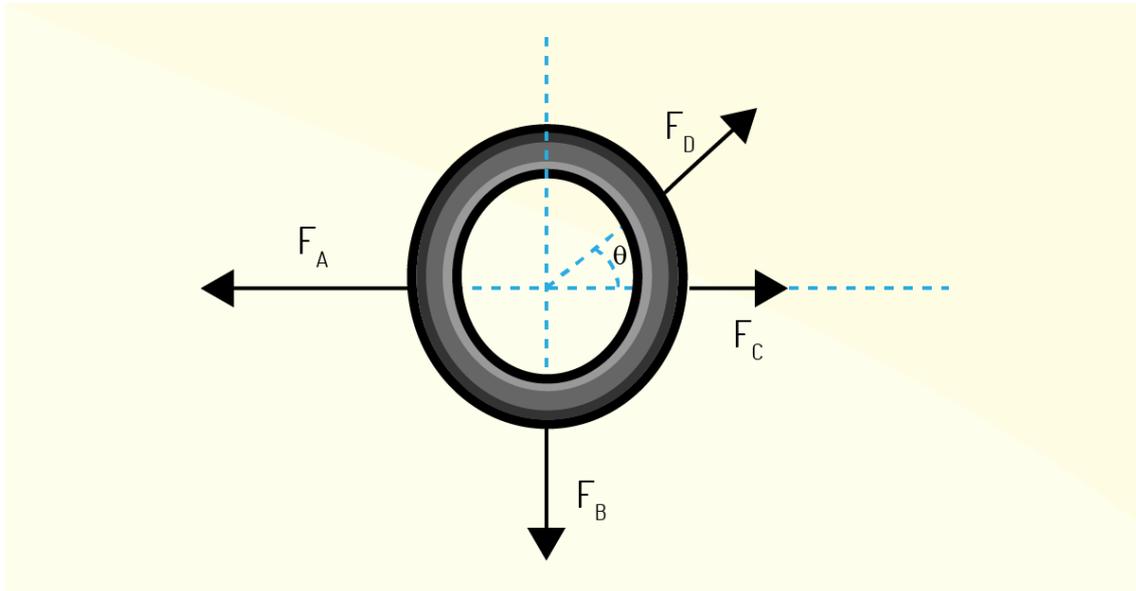


Figura 1.7 - Ilustração do exemplo anterior

Fonte: Elaborada pelo autor.

O modo de resolver esse exercício é bastante similar ao anterior, basta aplicar as condições de equilíbrio estático de um ponto material, assim, temos:

$$\sum F_x = 0 \text{ e } \sum F_y = 0$$

Em seguida, decompor a força de Daniela sobre os eixos x e y, ficando da seguinte forma as componentes dessa força em x e y:

$$F_x = F_D \cos \theta$$

$$F_y = F_D \sin \theta$$

Agora, podemos escrever as equações de equilíbrio para os eixos x e y. Para o eixo x,

$$F_A = F_C + F_D \cos \theta$$

e para o eixo y,

$$F_B = F_D \sin \theta$$

Da primeira, encontramos o valor de F_D e, substituindo na segunda, entramos com o valor de F_B . Assim, a força da Bianca é de 60 e a da Daniela é de 100N.

Primeira lei de Newton

Quando falamos de força, logo imaginamos a situação de empurrar ou puxar um objeto. Conceitualmente, a força nos fornece o grau de interação entre dois corpos ou entre o corpo e o meio, ou seja, uma descrição quantitativa da interação.

Existem duas classificações para forças: forças de contato e forças de campo. As **forças de contato** são aquelas que envolvem o contato direto entre os corpos, por exemplo, quando você precisa empurrar um carro que ficou atolado na lama. Para empurrar o carro, você precisa exercer uma força sobre ele. Um cabo de aço sustenta um elevador para que este não caia.

Já as **forças de campo**, também conhecidas como forças de longo alcance, são aquelas que não envolvem contato direto entre os corpos, sendo assim, atuam mesmo quando os corpos estão afastados. A força da gravidade é um exemplo de força de longo alcance, haja vista que, para manter a Terra em órbita, o sol exerce uma força de atração sobre a Terra, chamada de força gravitacional. Você já deve ter se deparado com outra força de campo bastante conhecida e nem se deu conta dela. Ao brincar com dois ímãs, você está diante de uma força de longo alcance, por exemplo.

Discutimos brevemente sobre como podemos classificar as forças quanto à interação entre os corpos, porém não dizemos nada sobre como as forças podem afetar o movimento. A força é a causa e o movimento, a consequência. Se um corpo está em repouso, ele tende a permanecer em repouso, a menos que uma força externa aja sobre ele.

Se um corpo está em movimento retilíneo e uniforme (MRU), ele tende a permanecer, a menos que uma força externa aja sobre ele.

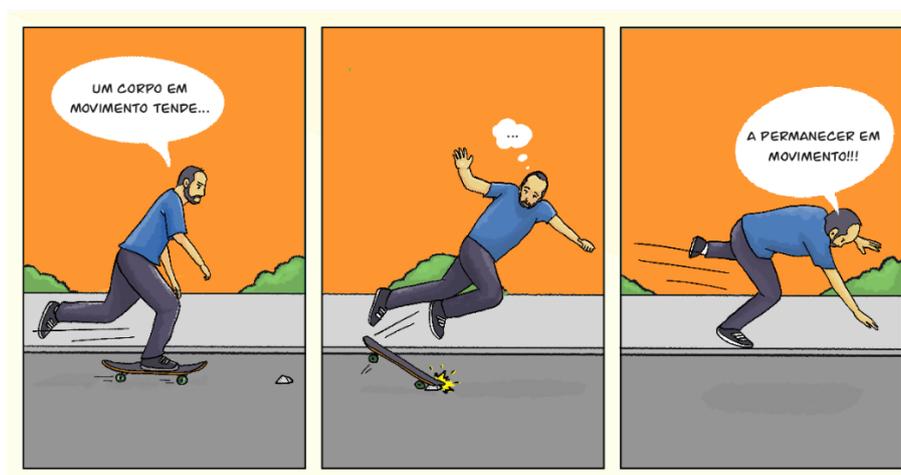


Figura 1.8 - Aplicação da primeira lei de Newton em um skatista que colide com uma pedra

Fonte: Isaac... (on-line).

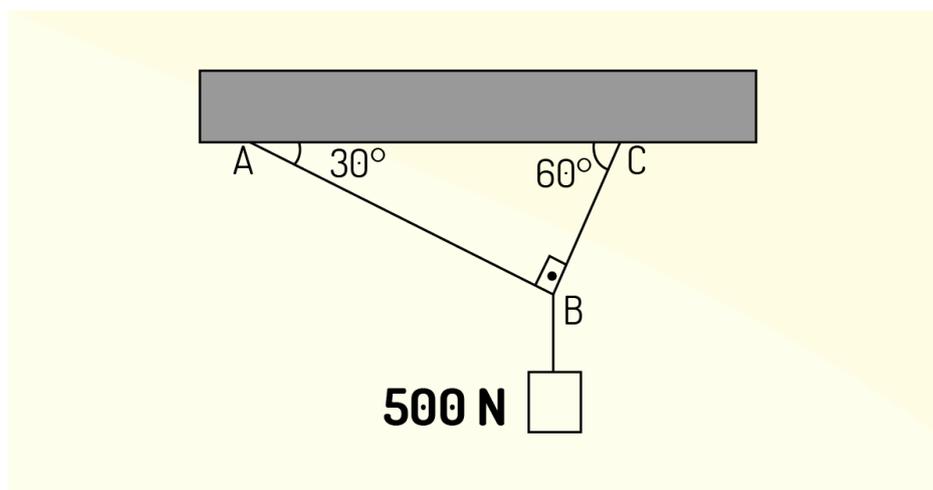
Isaac Newton (1647 - 1727) é considerado o pai da física clássica devido às suas enormes contribuições em diversas áreas da física, em particular na mecânica. As leis de Newton são partes fundamentais da dinâmica, haja vista que toda a dinâmica “gira” em torno das leis propostas por Newton.

REFLITA

Ao dirigir, use o cinto de segurança. O cinto de segurança é um dos meios mais eficaz de reduzir possíveis riscos de ferimentos graves e até a morte. Como já estudamos, a primeira lei de Newton propõe que corpos tendem a permanecer em movimento (uniforme) a menos que uma força externa aja sobre ele. Nos casos de acidentes com vítima sem cinto de segurança, a força externa que age sobre essa vítima será a força de colisão contra o volante ou para-brisa.

ATIVIDADES

2) Um corpo de 500N encontra-se suspenso, como mostra a figura a seguir. Os fios que mantêm o corpo suspenso e em equilíbrio estático são ideais e têm pesos desprezíveis. A tração na corda AB, em N, é de:



Fonte: Elaborada pelo autor.

- a) 250 N.
- b) 300 N.
- c) 325 N.
- d) 350 N.
- e) 375 N.

Corpos Rígidos

Corpo rígido pode ser entendido como sendo resultado da combinação de um grande número de partículas com distâncias invariantes, mesmo submetida à ação de forças externas. Entenda o corpo rígido como um modelo ideal no estudo da mecânica.

Forças Internas e Externas

Força pode ser entendida como a interação entre dois corpos. As forças que atuam em um corpo rígido podem ser classificadas como sendo forças externas e internas, diferenciadas pelo local da sua ação. Enquanto as **forças internas** são aquelas que mantêm a forma dos corpos rígidos, ou seja, as forças que mantêm unidas as várias partes de uma estrutura; as **forças externas** representam a ação de outros corpos sobre o corpo rígido.

Princípio da Transmissibilidade

A ação de uma força não se altera mesmo quando essa for aplicada em diferentes pontos ao longo da linha de ação do corpo rígido, facilmente compreendida pela Figura 1.9.

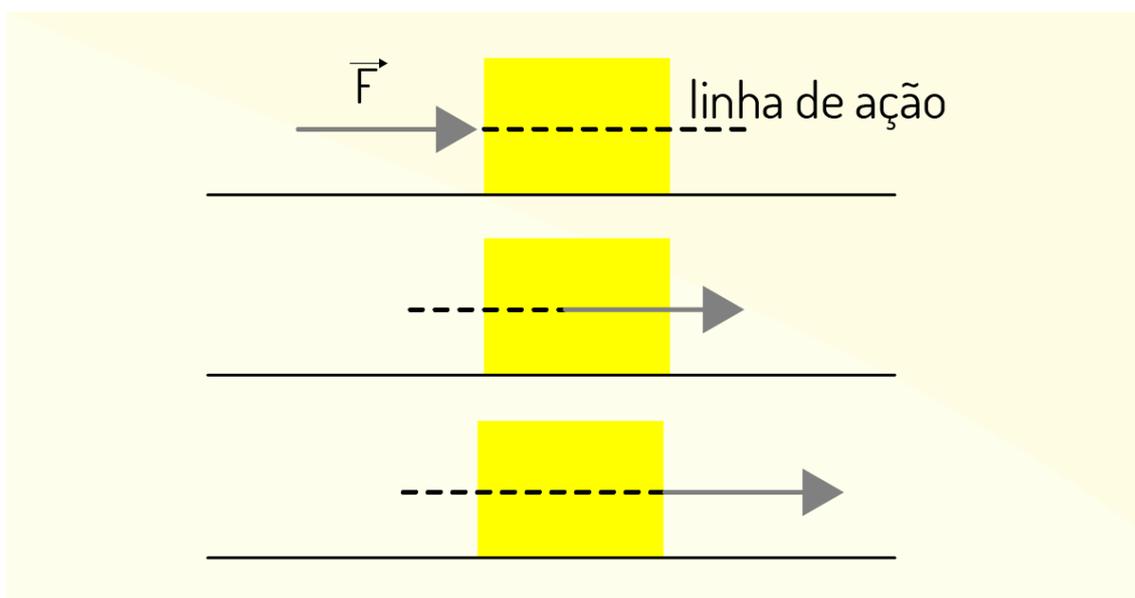


Figura 1.9 - Ação da força F em vários pontos sobre o corpo rígido

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, o princípio da transmissibilidade pode ser assim enunciado: uma força de intensidade F aplicada em um ponto P pode ser substituída por uma nova força F' , de mesma intensidade, mesma direção e mesmo sentido aplicada em um novo ponto P' . Se os pontos P e P' estiverem na mesma linha de ação, ambas as forças são **equivalentes** para as condições de movimento e equilíbrio do corpo.

Momento de uma Força em Relação a um Ponto

Ao realizar ações, como a troca de um pneu, brincar de gangorra ou até abrir a maçaneta de uma porta, as extremidades da abertura ficam em posição oposta, ou seja, há o ponto de giro da porta. Tudo isso tem a ver com a capacidade que os corpos possuem em girar em torno de um ponto. Para entender um pouco mais sobre isso, vamos estudar o momento de uma força em relação a um ponto de equilíbrio.

O momento de uma força pode ser entendido como a tendência que um determinado corpo adquire em girar em torno de um ponto que não esteja na mesma linha de atuação da força, como pode ser visto na Figura 1.10.

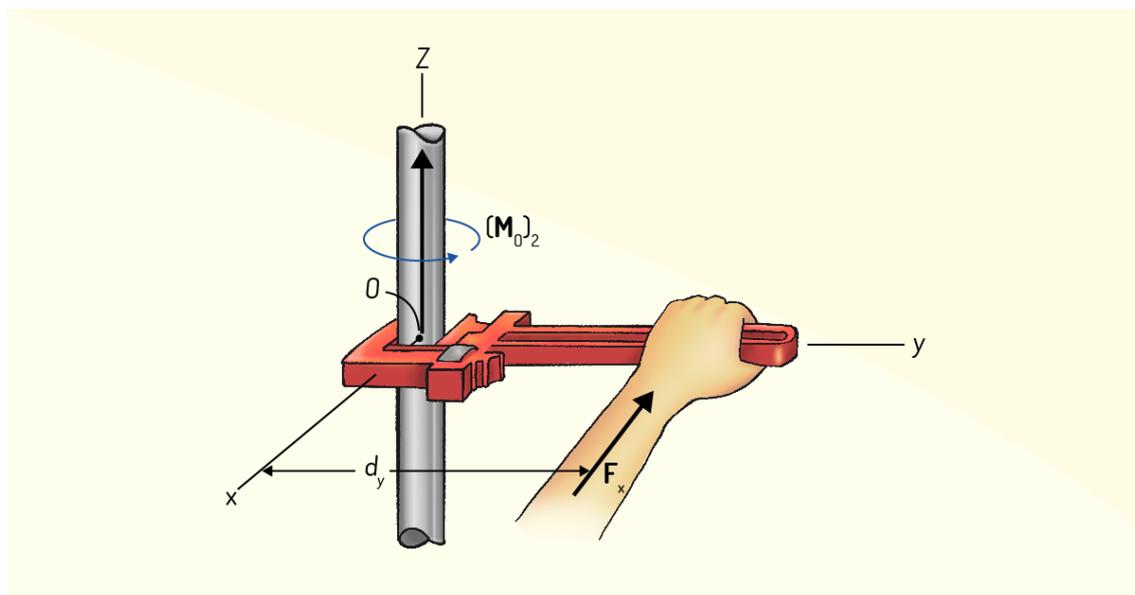


Figura 1.10 - Momento de uma força

Fonte: Hibbler (2010, p. 121).

Essa tendência em girar recebe, usualmente, dois nomes: torque ou momento de uma força, ou simplesmente momento. Matematicamente, a expressão para o momento é dada pelo produto vetorial entre a força \mathbf{F} e a distância \mathbf{d} que essa faz com um ponto P. Veja a expressão a seguir:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{d}$$

Pela definição de produto vetorial, \mathbf{M} é um vetor e o seu módulo pode ser encontrado da seguinte forma:

$$M = F d \sin\theta$$

Logo, o momento será máximo para $\theta = 90^\circ$, pois $\sin 90^\circ = 1$, ou seja, o maior valor para o momento angular se dá quando a força aplicada for perpendicular ao eixo da distância até o ponto P sobre a qual tende a girar. O momento angular é zero nos casos em que a força aplicada é paralela ao eixo que liga ao ponto P, fazendo um ângulo de $\theta = 0^\circ$, com isso, o $\sin 0^\circ = 0$.

Como o momento angular é entendido como a tendência em girar em torno de um ponto, nos casos bidimensionais, podemos adotar uma regra de sinal para o giro. Isso é apenas uma convenção.

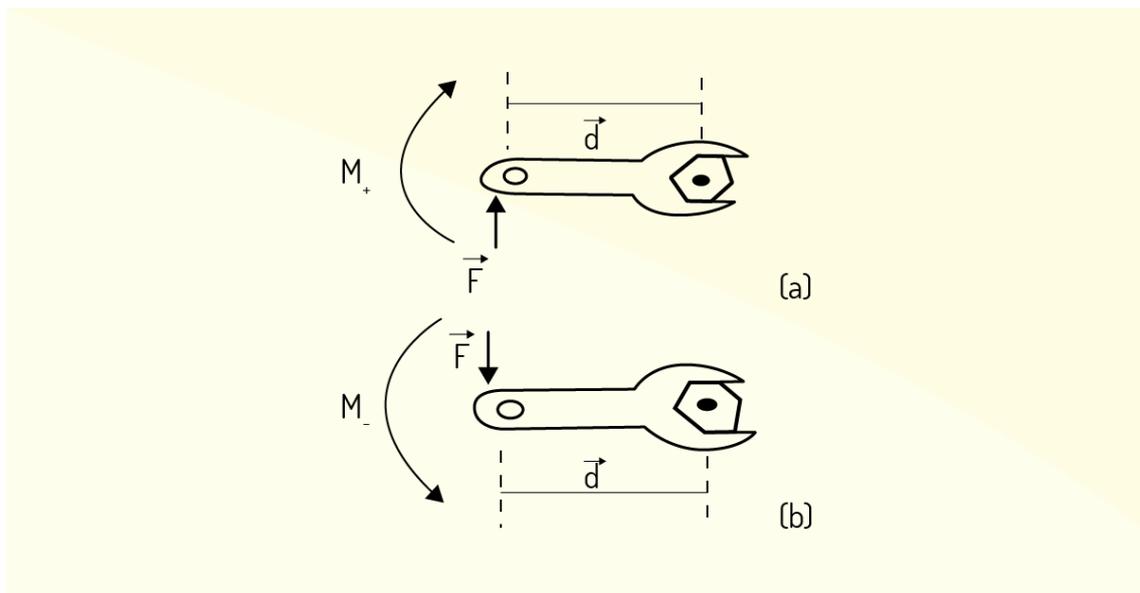


Figura 1.11 - Representação da força F , que dista d de um ponto P. Em (a), a força aplicada tende a fazer com que a chave gire no sentido horário, obtendo, assim, um momento positivo. Em (b), a chave irá girar no sentido anti-horário, momento negativo de acordo com nossa convenção

Fonte: Elaborada pelo autor.

Veja mais um exemplo para nos ajudar na compreensão e fixação:

Um bombeiro hidráulico, incapaz de afrouxar a conexão de um tubo, encaixa um pedaço de sucata (uma alavanca) sobre a haste da chave de grifa. A seguir ele usa seu peso de 900 N para ficar em pé na extremidade da alavanca. A distância entre o centro da conexão e o ponto onde o peso atua é igual a 0,80 m, e o eixo da alavanca faz um ângulo de 19° com a horizontal (YOUNG; FREEDMAN, 2006, p. 290).

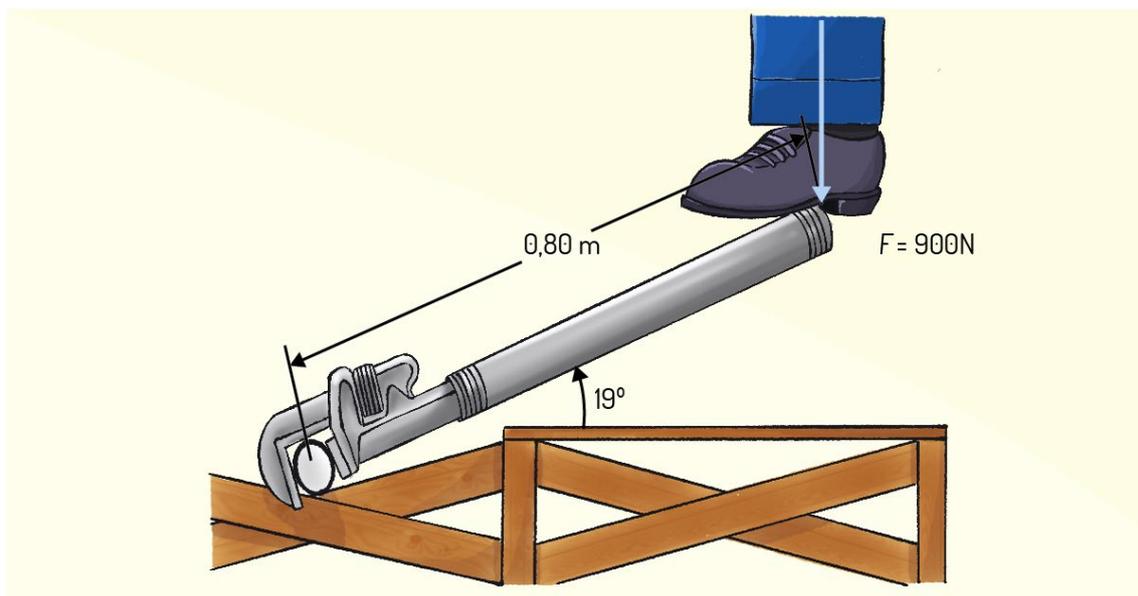


Figura 1.12 - Um mecânico hidráulico tenta afrouxar a conexão de um tubo ficando em pé na extremidade de uma alavanca

Fonte: Young e Freedman (2006, p. 290).

O primeiro passo é fazer o diagrama de forças, como indicado na Figura 1.13.

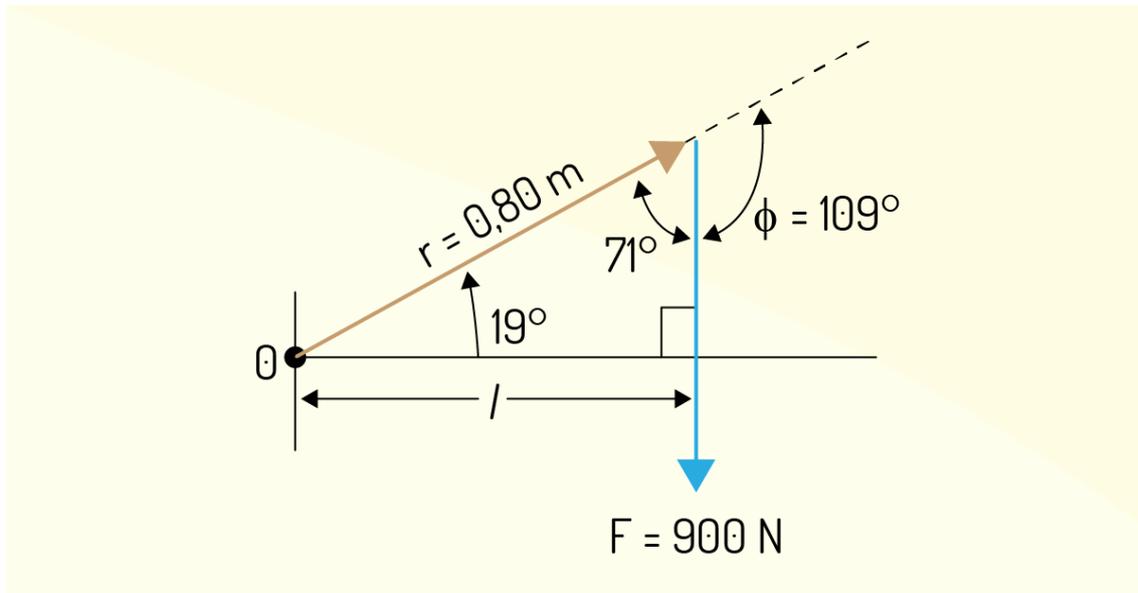


Figura 1.13 - Diagrama de força

Fonte: Young e Freedman (2006, p. 290).

Tome muito cuidado com as análises angulares agora!

É preciso identificar o ângulo formado entre a força **F** e o vetor distância **d**. Usando as propriedades trigonométricas do triângulo retângulo, o ângulo formado entre **F** e **d** é 109° ou 71° , haja vista que o seno é uma função ímpar, com isso, a expressão fica da seguinte forma:

$$M = F d \text{ sen}\theta$$

$$M = 900 \cdot (0,8) \text{ sen } 109^\circ = 900 \cdot (0,8) \text{ sen } 71^\circ$$

$$M = 680 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Como o momento é positivo, o sentido do giro é horário.

Veja outro exemplo.

Uma força horizontal de 250 N é aplicada na extremidade de uma alavanca fixa em um ponto O, como segue a Figura 1.14. Qual o momento da força no ponto O.

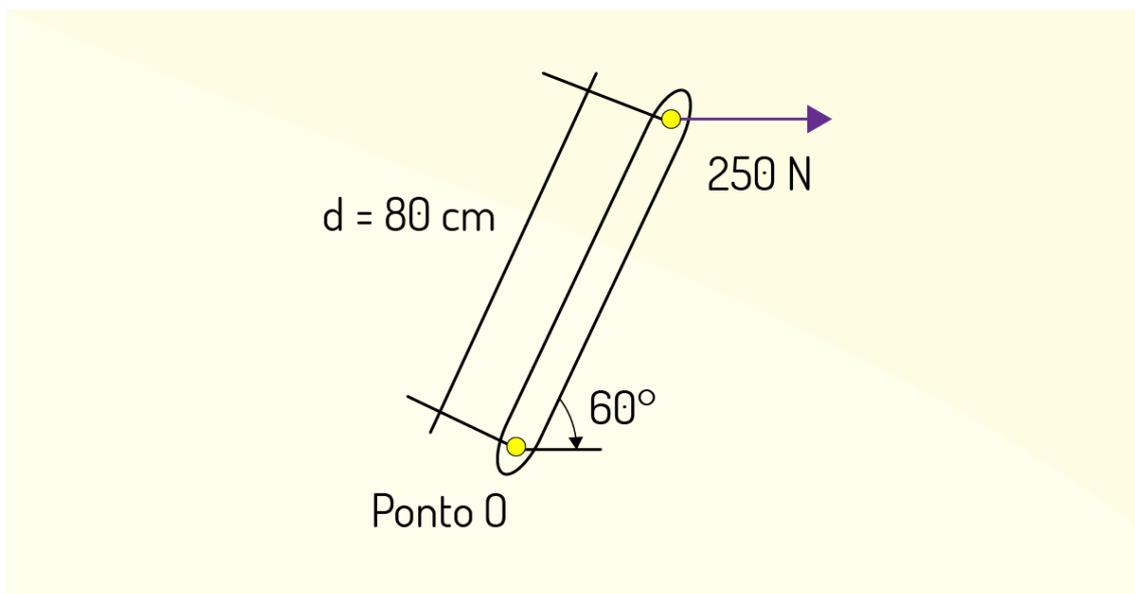


Figura 1.14 - ilustração para o exemplo

Fonte: Elaborada pelo autor.

A força F gera um momento no sentido horário e seguindo a fórmula já conhecida, a expressão do momento é:

$$M = F d \operatorname{sen}\theta$$

$$M = 250 \cdot 0,8 \operatorname{sen}60$$

$$M = 173,2 \text{ N.m}$$

3.1.3 Teorema de Varignon

A ação de duas ou mais forças concorrentes sobre um ponto \mathbf{P} gera um momento resultante e esse pode ser calculado somando vetorialmente os momentos individuais gerados por cada força, isoladamente. A esse teorema, damos o nome de teorema de Varignon. Em outras palavras, podemos dizer que em um sistema de duas ou mais forças, a força resultante deve gerar um momento de mesma intensidade que a somatória de todos os momentos gerados por todas as forças.

$$M_R = F_R \cdot d = \sum_n F_n \times d_n$$

Como o momento angular é uma grandeza vetorial, o momento resultante pode ser expressado pela soma dos momentos nas direções x e y , para o caso bidimensional. A mesma análise pode ser estendida para o caso em que temos momento nas três direções, x , y e z .

$$\vec{M}_R = M_x \hat{i} + M_y \hat{j}$$

Duas forças de intensidade 500 N e 800 N atuam sobre um ponto A localizado sobre um suporte de metal, conforme ilustra a Figura 1.15. Determine o momento resultante em relação ao ponto P.

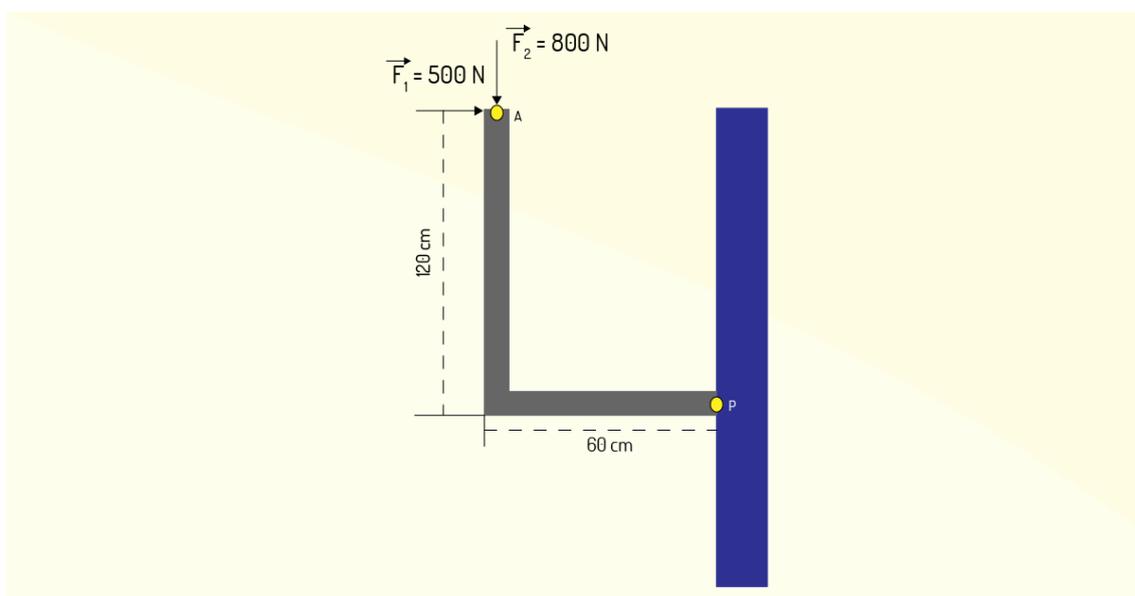


Figura 1.15 - Suporte de metal no formato de L preso em uma parede

Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução: Usaremos a ideia proposta no teorema de Varignon, o qual nos diz que o momento resultante é igual à soma dos momentos independentes.

Analisando a figura, a força F_2 realiza momento girando em torno do eixo x e, pelo princípio da transmissibilidade, o ponto de ação da força dista 0,6 m do ponto P. A força F_1 , por sua vez, realiza um momento girando ao redor do eixo y , da mesma forma, o ponto de ação da força dista 1,2 metros do ponto P. Com isso, podemos montar a equação do momento da seguinte forma:

$$M_R = F_R \cdot d = \sum_n F_n \times d_n$$

O módulo do momento angular pode ser escrito:

$$M_R = F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2$$

O sinal negativo do momento gerado pela força F_2 é devido ao sentido da rotação, uma vez que a força F_1 gera um momento no sentido horário, e a força F_2 gera um momento no sentido anti-horário. Agora, vamos substituir os valores. Assim:

$$M_R = 500 \cdot (1,2) - 800 \cdot (0,6)$$

$$M_R = 600 - 480$$

$$M_R = 120 \text{ N.m}$$

O resultado nos mostra que haverá uma tendência em girar no sentido horário com a intensidade de 120 N.m.

ATIVIDADES

3) Para soltar o pneu furado do seu caminhão, Pedro utiliza uma chave de rodas no formado de uma cruz, como ilustrado na figura a seguir.



Fonte: Serezniy / 123RF.

Sabendo que a distância de duas extremidades opostas é de 60 cm, qual é a força aplicada sobre as duas extremidades para soltar um parafuso apertado com um torque de 60 N.m?

- a) 50 N.
- b) 100 N.
- c) 150 N.
- d) 200 N.
- e) 250 N.

Equilíbrio dos Corpos Rígidos

Um ponto material está em equilíbrio quando a somatória de todas as forças que atuam sobre ele for nula. Normalmente, esse enunciado é conhecido como a primeira condição de equilíbrio. Todavia, para situações em que envolvam corpos rígidos, essa condição não é o suficiente. Agora, quando forças atuam em pontos diferentes em um corpo que tenha uma distribuição de massa ao longo de seu comprimento, uma outra condição também precisa ser satisfeita para que esse esteja em equilíbrio: a soma dos torques em relação a qualquer ponto deve ser igual a zero. Garantir que o corpo não possa girar.

Um corpo rígido que, dentro de um sistema inercial, não gira em torno de um ponto específico e pré-estabelecido possui momento angular igual a zero em torno desse ponto. Resumindo, um corpo rígido que se encontra em equilíbrio não pode girar em torno de nenhum ponto, de tal forma que a soma dos torques deve ser igual a zero em relação a qualquer um dos pontos. Esta é conhecida como a segunda condição de equilíbrio. Matematicamente, a segunda condição de equilíbrio pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sum \tau = 0 \text{ ou } \sum M = 0$$

Atenção! Ao escolher um ponto de referência de forma arbitrária, esse deve ser mantido para calcular todos os torques sobre o corpo.

Graus de Liberdade

Uma estrutura submetida a um conjunto de forças estará em equilíbrio estático quando não houver movimento translacional e rotacional. No plano, um sistema bidimensional, uma estrutura estará em equilíbrio estático quando as equações a seguir são satisfeitas.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

Com isso, podemos afirmar que, em um sistema bidimensional, há apenas três graus de liberdade. No espaço, um sistema tridimensional, uma estrutura espacial estará em equilíbrio estático quando as equações a seguir são satisfeitas.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

A fim de eliminar todo e qualquer movimento, além das possíveis rotações, algumas restrições precisam ser feitas. Essas restrições são dadas por meio de esforços reativos de dispositivos mecânicos que recebem o nome de apoio ou vínculos.

Reações de Apoio

As reações de apoio são responsáveis pelo vínculo da estrutura, seja qual for, de tal modo que assegura a sua não mobilidade e não rotação, garantindo, assim, o equilíbrio da estrutura. Sendo assim, a função básica das reações de apoio é de restringir os graus de liberdade de uma estrutura ao gerar reações opostas ao sentido do movimento ou rotação.

As reações de apoio, ou vínculos, são classificadas de acordo com o número de movimentos impedidos. Nos casos de estruturas planas, estruturas bidimensionais, os vínculos podem ser de três tipos.

Vínculo de primeira ordem: são aqueles vínculos que permitem dois graus de liberdade à estrutura plana, ou seja, impedem o movimento somente em uma única direção. Resumindo, os vínculos de primeira ordem oferecem apenas uma restrição e, com isso, permitem dois graus de liberdade (movimento em outra direção e a rotação).

São exemplos de vínculo de primeira ordem: os roletes, superfícies lisas, hastes curtas e cabos, cursores e pinos deslizantes. A representação de um apoio de primeira ordem é dada da seguinte forma:

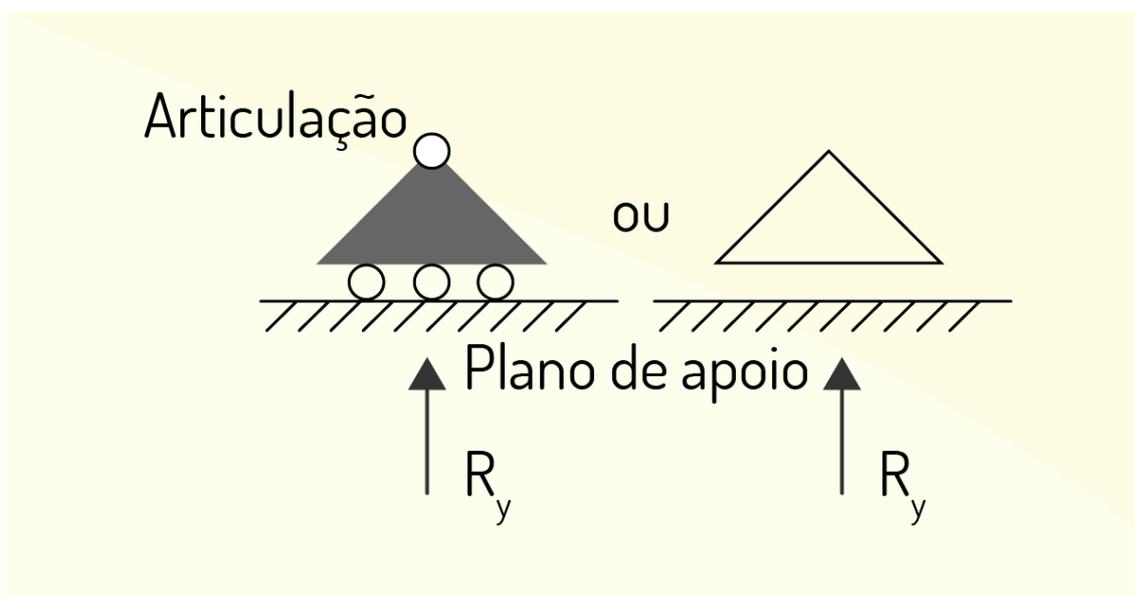


Figura 1.16 - Ilustração de vínculos de primeira ordem e as respectivas reações na vertical

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vínculo de segunda ordem: são aqueles que permitem um único grau de liberdade para a estrutura plana, ou seja, impedem o movimento nas direções x e y . Mesmo restringindo o corpo de se mover, isso não impede que ele rotacione em torno de um ponto. Resumindo, os vínculos de primeira ordem oferecem duas restrições, restrições ao movimento em x e y , e, com isso, permitem a rotação em torno de um ponto. São exemplos de vínculo de segunda ordem: os pinos polidos em orifícios ajustados, articulações e superfícies rugosas. A representação de um apoio de segunda ordem é dada da seguinte forma:

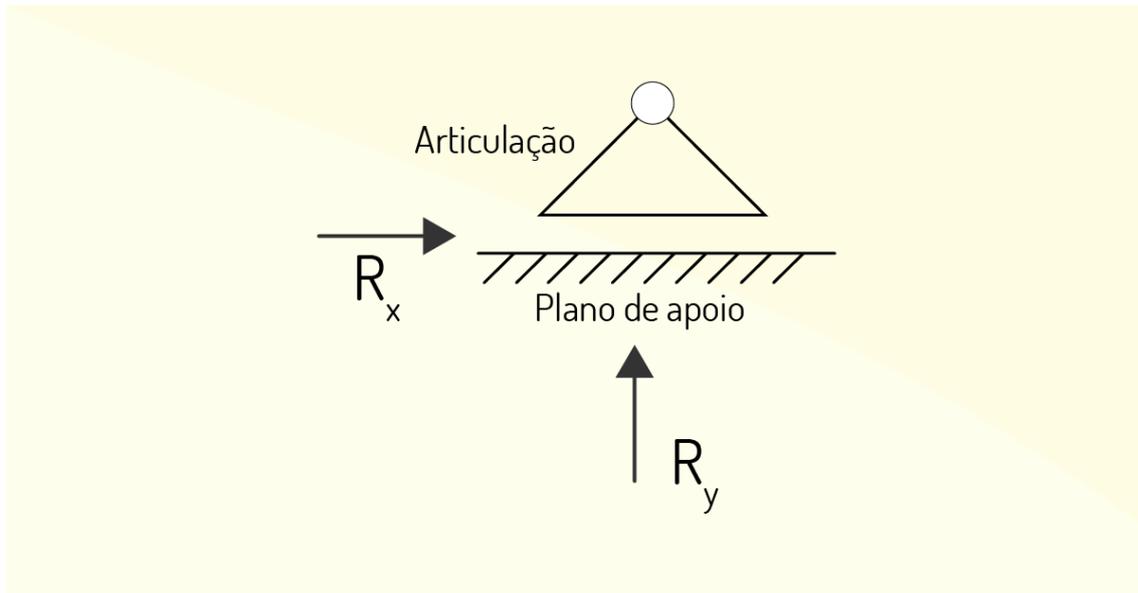


Figura 1.17 - Ilustração de vínculos de primeira ordem e as respectivas reações na vertical e horizontal

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vínculo de terceira ordem: são aqueles que não permitem grau de liberdade para uma estrutura plana, ou seja, impedem o movimento nas direções x e y, e a rotação sobre um ponto.

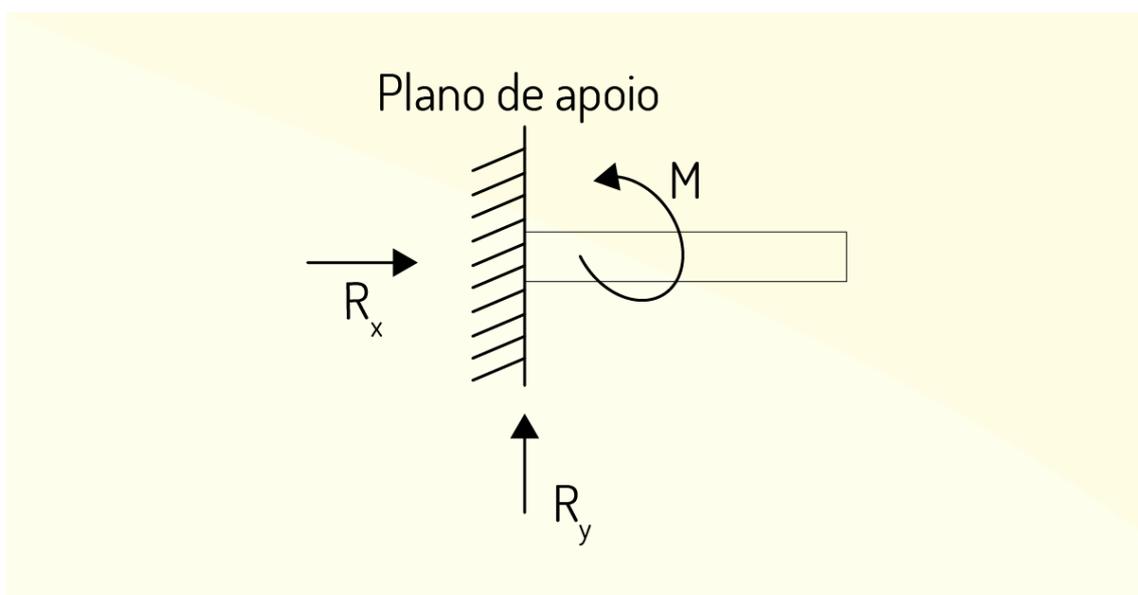


Figura 1.18 - Ilustração de vínculos de primeira ordem e as respectivas reações na vertical, horizontal e o momento

Fonte: Elaborada pelo autor.

Resumindo, os vínculos de terceira ordem impedem o movimento e a rotação.

Equilíbrio em Duas Dimensões

Agora, traremos exemplos de equilíbrio em um sistema de forças bidimensionais.

Exemplo para fixar o conteúdo: uma viga com comprimento de 8 m encontra-se apoiada nas duas extremidades e sustenta três cargas concentradas atuantes, como observado na Figura 1.19.



Figura 1.19 - Viga biapoiada sustentando três forças atuantes

Fonte: Borja (*on-line*).

Uma representação esquemática das forças atuantes sobre a viga pode ser ilustrada como na Figura 1.20.

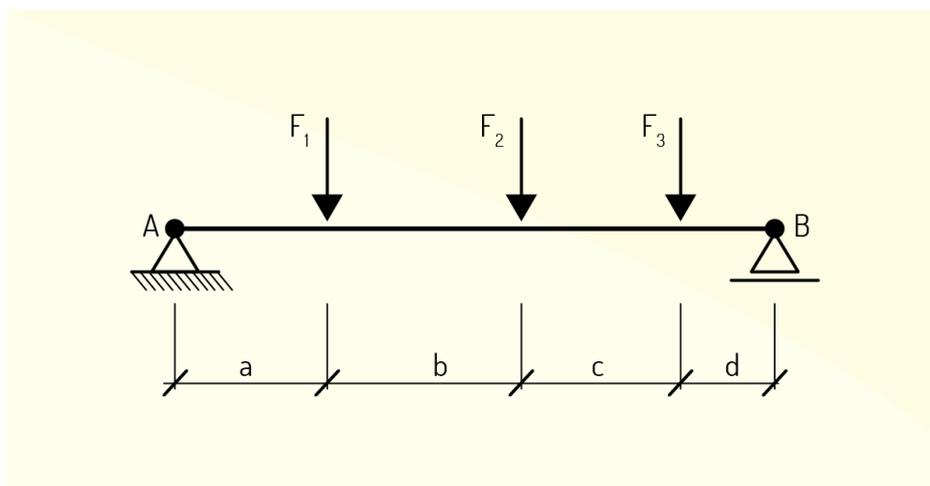


Figura 1.20 - Representação esquemática da viga e as cargas aplicadas

Fonte: Borja (*on-line*).

Como você pôde perceber, o valor de nenhuma força foi fornecido ainda. Para resolver um problema como esse, o primeiro passo é esboçar o diagrama de esforços ou diagrama de corpo livre.

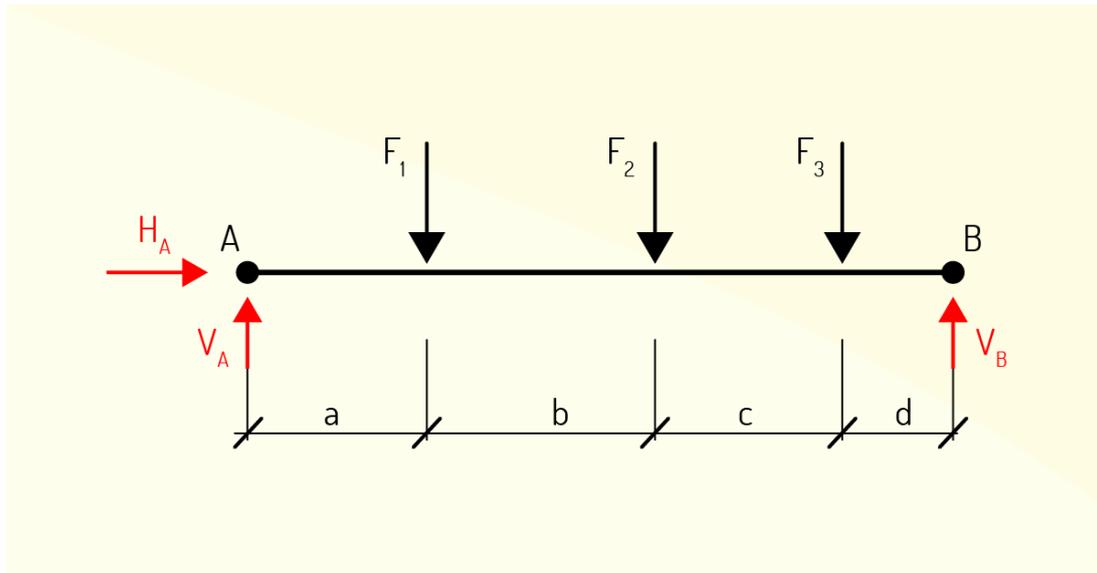


Figura 1.21 - Diagrama de corpo livre

Fonte: Borja (*on-line*).

Como se trata de um exemplo de fixação, vamos designar valores para as forças e as respectivas distâncias, como na Figura 1.22, e a partir daí desenvolver os cálculos.

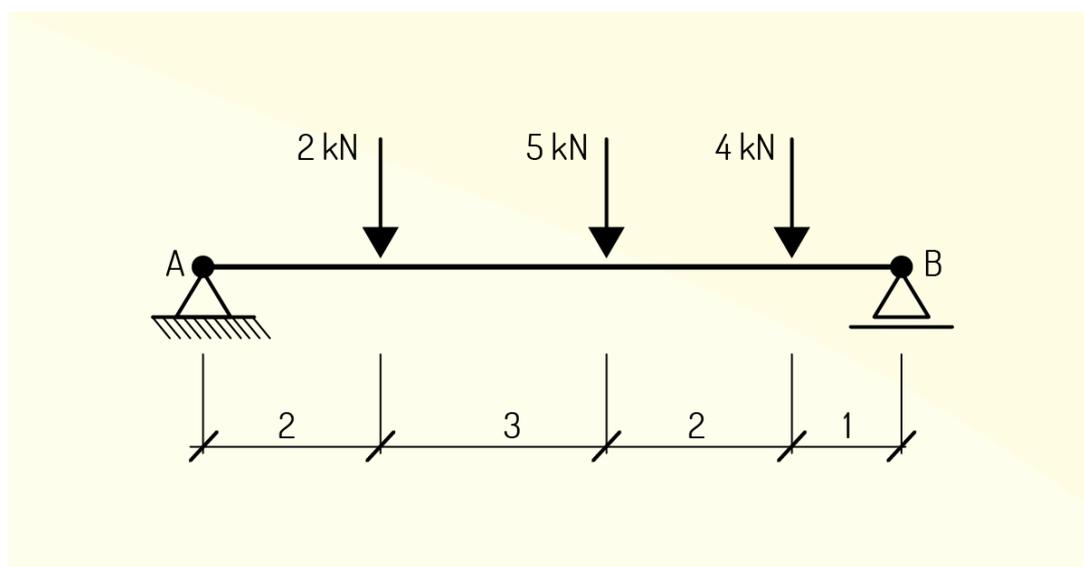


Figura 1.22 - Forças e distâncias

Fonte: Borja (*on-line*).

Nosso objetivo é encontrar as reações de apoio V_A (Reação vertical no ponto A), H_A (Reação horizontal no ponto A) e V_B (Reação vertical no ponto B). Veja que no ponto A temos um apoio de segunda ordem, com isso, teremos duas reações de apoio. Já no ponto B, temos um apoio de primeira ordem, logo teremos apenas uma reação de apoio. Aplicando agora as condições de equilíbrio para um corpo rígido em duas dimensões, teremos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Como era de se esperar, a reação horizontal no ponto A é igual a zero, pois não há força externa alguma sobre o eixo x.

Agora, vamos analisar as outras duas condições de equilíbrio, primeiro, a somatória das forças em y.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B = F_1 + F_2 + F_3$$

$$V_A + V_B = 2000 + 5000 + 4000$$

$$V_A + V_B = 11000\text{N}$$

Agora, obtemos uma equação com duas incógnitas que não é possível resolver, em princípio. Utilizando a somatória dos momentos em relação ao ponto A, obtemos a seguinte expressão:

$$\sum M = 0 \Rightarrow F_1 d_1 + F_2 d_2 + F_3 d_3 - V_B d = 0$$

$$F_1 d_1 + F_2 d_2 + F_3 d_3 = V_B d$$

$$2000 \cdot (2) + 5000 \cdot (5) + 4000 \cdot (7) = V_B (8)$$

$$V_B = 7125 \text{ N}$$

Substituindo o valor de V_B encontrado na expressão $V_A + V_B = 11000 \text{ N}$, obtemos:

$$V_A = 11000 \text{ N} - 7125 \text{ N}$$

$$V_A = 3875 \text{ N}$$

Equilíbrio em Três Dimensões

Na mecânica, muitos problemas exigem análises mais apuradas e em três dimensões. Dessa forma, é conveniente escrever todas as forças em função das componentes x , y e z .

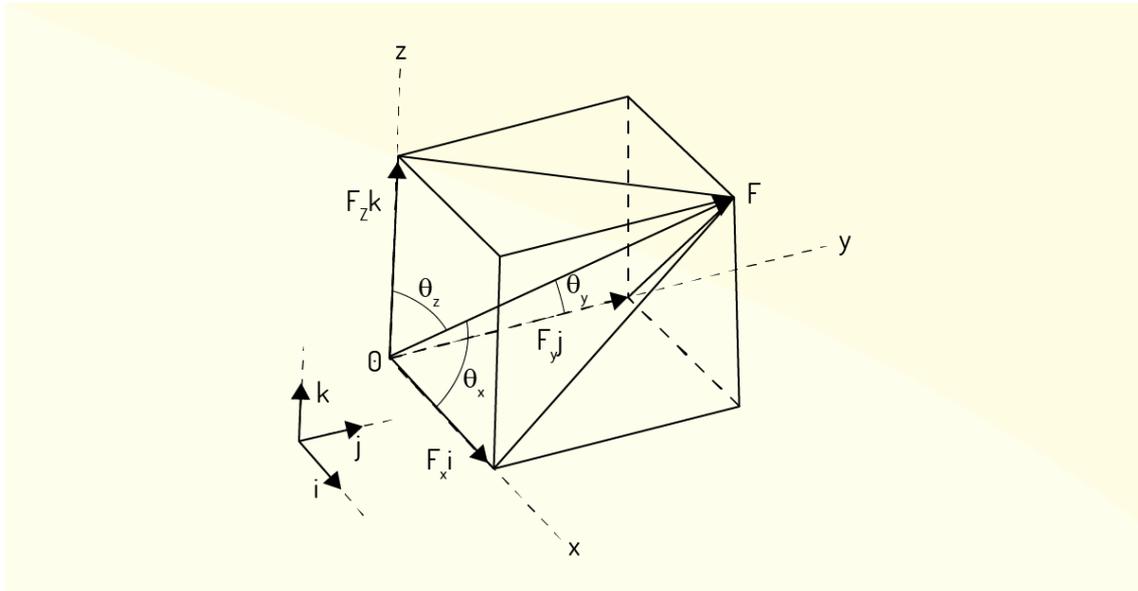


Figura 1.23 - Componentes do vetor F sobre os eixos x , y e z

Fonte: Meriam e Kraige (2009, p. 49).

Para um vetor F no espaço, vamos escolher os ângulos θ_x , θ_y e θ_z como sendo os ângulos entre o vetor F e os eixos x , y e z , respectivamente. Para escrever as projeções F_x , F_y e F_z de um vetor F sobre os eixos de um sistema espacial, vamos adotar as seguintes expressões:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F_x = F \cos \theta_x$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_z = F \cos \theta_z$$

Aplicando as condições de equilíbrio para uma estrutura em três dimensões, podemos calcular as reações de apoio.

Com as ferramentas que foram dadas, vamos resolver, juntos, um exercício que nos ajudará na fixação do conteúdo: a barra AB está sujeita a uma força de 200 N sobre o ponto C, como ilustrado na Figura 1.24. Determine a reação no ponto A e as tensões nas cordas BE e BD.

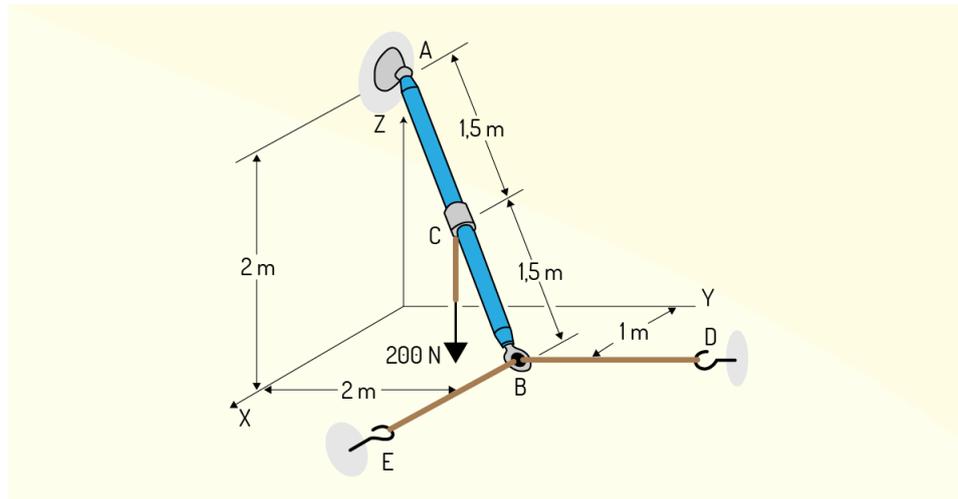


Figura 1.24 - Ilustração da barra AB sujeita a uma força de 200 N

Fonte: Curotto (2015, p. 20).

Como já vimos, para que esse sistema permaneça em equilíbrio, as seis condições, três para a somatória das forças e três para a somatória dos momentos, precisam ser satisfeitas. O ponto de partida é expressar todas as forças envolvidas sobre os seus respectivos eixos, como na Figura 1.25.

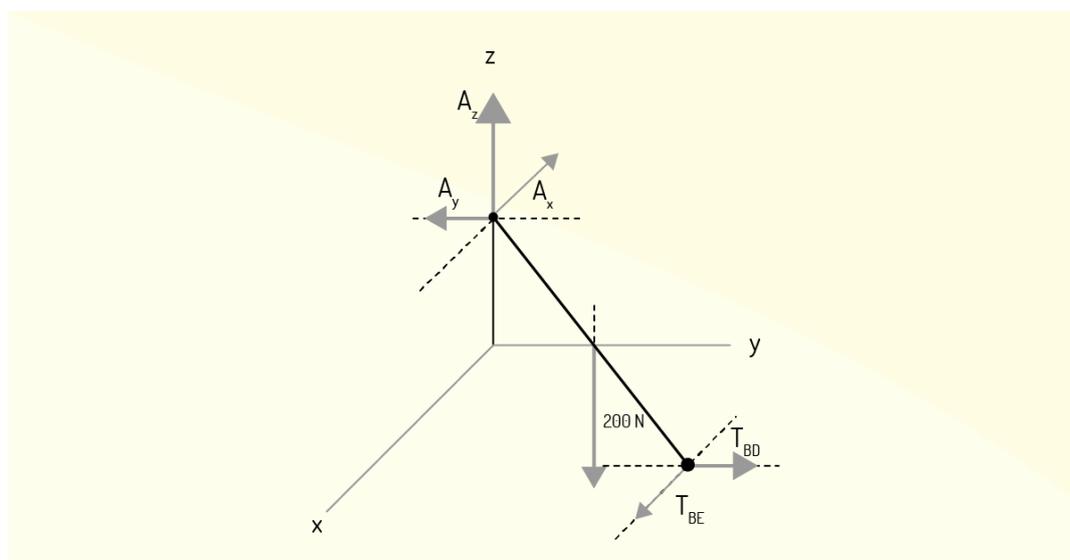


Figura 1.25 - Diagrama de esforços

Fonte: Elaborada pelo autor.

As forças A_x , A_y e A_z são as reações no ponto A. As Atrações T_{BE} e T_{BD} são as forças nos cabos. Agora, o próximo passo é aplicar as condições de equilíbrio para as forças, assim, ficaremos com:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = T_{BE}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = T_{BD}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z = 200 \text{ N}$$

Verifique que ainda nos falta descobrir o valor de 4 incógnitas e, para encontrá-las, utilizaremos a somatória dos momentos. A escolha do ponto onde iremos analisar o momento sobre ele é de grande importância, devemos escolher de tal forma a eliminar o maior número de forças possíveis e, com isso, o maior número de incógnitas.

Agora, vamos encontrar as coordenadas cartesianas dos pontos A, B e C da seguinte forma:

A(0;0;2)

B(1;2;0)

C(½;1;1)

FIQUE POR DENTRO

Para você que ficou na dúvida de como encontrar as coordenadas de um ponto no espaço, em três dimensões, o link a seguir pode te ajudar com algumas orientações importantes: <https://www.youtube.com/watch?v=YkKN9AJmKJg>. Acesso em: 06 jan. 2020.

Uma vez que o ponto C está no ponto médio entre A e B, a expressão do momento genérico fica:

$$M = d_{AB} \times T_{BE} + d_{AB} \times T_{BD} + d_{AC} \times F$$

O passo a seguir requer um pouco de álgebra linear, em que é preciso encontrar o vetor distância d_{AB} e d_{AC} , ou a distância entre dois pontos, assim, encontraremos:

$$d_{AB} = (1\hat{i}, 2\hat{j}(\text{“chapéu”}), -2(\text{chapéu}))$$

$$d_{AC} = (1/2\hat{i}, 1\hat{j}(\text{“chapéu”}), -1(\text{chapéu}))$$

Veja que é necessário calcular três produtos vetoriais, calculando o determinante da matriz formada pelas componentes dos vetores, aqui, resolveremos apenas um deles.

$$d_{AB \times T_{BE}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ F_{BE} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \det = -2 F_{BE} j(\text{"chapéu"}) - 2F_{BE} k(\text{"chapéu"})$$

Fazendo o mesmo procedimento para os demais produtos vetoriais.

$$d_{AB \times T_{BD}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & F_{BD} & 0 \end{vmatrix} \quad \det = F_{BD} k(\text{"chapéu"}) + 2F_{BD} \hat{i}$$

$$d_{AC \times F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -200 \end{vmatrix} \quad \det = -200\hat{i} + 100 j(\text{"chapéu"})$$

Agora, vamos juntar todas os produtos vetoriais na expressão do momento:

$$M = [-2 F_{BE} j(\text{"chapéu"}) - 2F_{BE} k(\text{"chapéu"})] + [F_{BD} k(\text{"chapéu"}) + 2F_{BD} \hat{i}] + [-200\hat{i} + 100 j(\text{"chapéu"})]$$

Juntando todas as expressões que estão na mesma direção:

$$M = [2F_{BD} - 200]\hat{i} + [100 - 2F_{BE}]\hat{j}(\text{“chapéu”}) + [F_{BD} - 2F_{BE}]\hat{k}(\text{“chapéu”})$$

Como o momento deve ser igual a zero em todas as direções, ou seja:

$$M_x = 0$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = 0$$

em x, temos que: $2F_{BD} - 200 = 0 \Rightarrow F_{BD} = 100 \text{ N}$

em y: $100 - 2F_{BE} = 0 \Rightarrow F_{BE} = 50 \text{ N}$

O momento em z serve para validar as forças já encontradas.

Depois de encontrar as forças F_{BE} e F_{BD} , vamos achar as reações no ponto A.

$$A_x = T_{BE} \Rightarrow A_x = F_{BE} = 50 \text{ N}$$

$$A_y = T_{BD} \Rightarrow A_y = F_{BD} = 100 \text{ N}$$

$$A_z = 200 \text{ N}$$

ATIVIDADES

4) Pedro e Paulo estão carregando um bloco de concreto que pesa 1000 N, suspenso em uma barra extremamente rígida AB de 200 N e 3,0 m de comprimento, cujas extremidades apoiam-se nos respectivos ombros, pontos A e B. O cofre está a 0,5 m da extremidade A. A força aplicada pela extremidade A ao ombro de Pedro será de, aproximadamente:

- a) 450 N.
- b) 500 N.
- c) 867 N.
- d) 933 N.
- e) 1028 N.

INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: Mecânica para engenharia

Editora: LTC

Autor: J. L. Meriam e L. G. Kraige

ISBN: 9788521617181

Comentário: O livro “Mecânica para engenharia” traz uma abordagem mais ampla sobre a mecânica aplicada às engenharias. A partir das leis de Newton e conceitos básicos de vetores até sistemas complexos para aplicação equações fundamentais da dinâmica e estática.

INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: Geometria analítica - um tratamento vetorial

Editora: Pearson Universidades

Autor: P. Boulos e I. Camargo

ISBN: 978-8587918918

Comentário: O produto vetorial entre dois vetores pode até parecer difícil. Se você sentir que tem dificuldade, aconselho acompanhar os conteúdos do livro “Geometria Analítica - um tratamento vetorial”, que faz uma abordagem bem detalhada sobre o conteúdo citado.

INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: Álgebra linear

Editora: Harbra

Autor: José Luiz Boldrini

ISBN: 978-8529402024

Comentário: O livro “Álgebra linear”, de José Luiz Boldrini, trata, dentre outros temas, do determinante de uma matriz, que pode ser facilmente calculado utilizando a regra de Sarrus. É muito importante para quem estuda essa área do conhecimento, portanto, indicado para o conteúdo tratado nesta unidade.

UNIDADE II

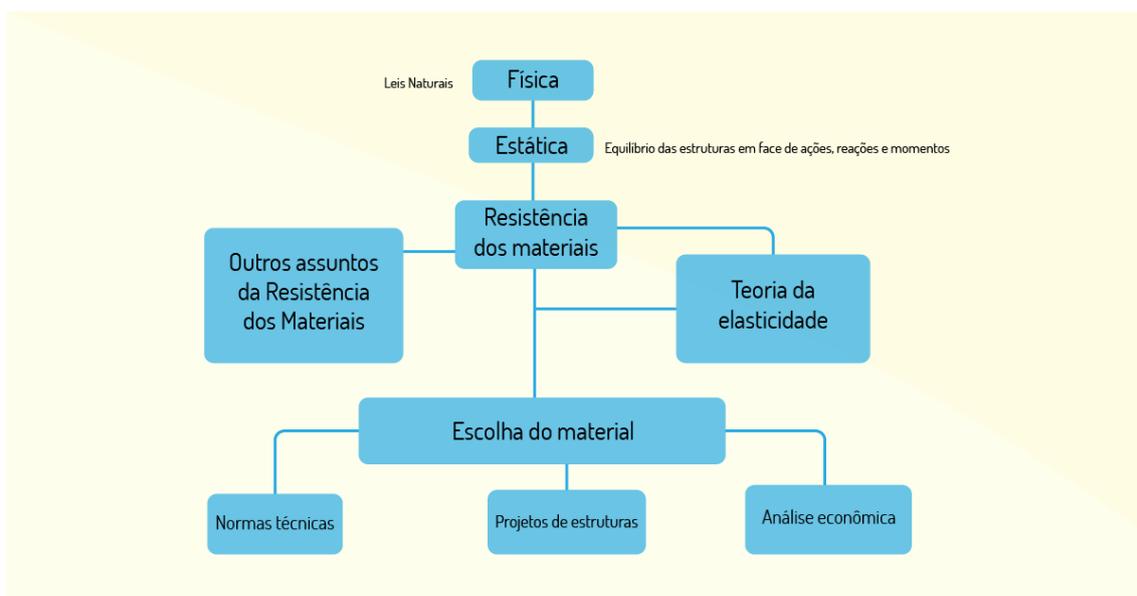
Análise Estrutural: Forças em Vigas e Cabos

Helena Aparecida Guimarães Brito de Araujo

Introdução

A mecânica e a resistência de materiais tiveram seu desenvolvimento ampliado a partir dos estudos realizados por Leonardo da Vinci e Galileu Galilei, no que diz respeito à geometria das estruturas, entre elas, das vigas, que, aliadas ao comportamento dos materiais, deram origem à compreensão e à resistência dos materiais como ciência.

A análise estrutural é parte fundamental para o desenvolvimento de um projeto de engenharia de estruturas, visto que se refere aos efeitos das cargas sobre essas estruturas físicas e seus componentes (vigas, treliças e cabos), correlacionando a mecânica e a matemática aplicadas à ciência dos materiais, calculando a deformação, força interna, tensão, reação de apoio e estabilidade da estrutura. A partir dessas relações, é possível verificar a disposição de uma estrutura para seu uso (HIBBELER, 2010).



Fonte: Adaptada de Botelho (1998).

Estruturas

Sabemos que uma estrutura é o conjunto de partes resistentes, ou seja, um corpo ou sistema de partes que suportam uma carga e certificam a estabilidade de um elemento do projeto de modo que sua análise permite a simplificação desses projetos em modelos estruturais, cujos principais fatores para sua elaboração são:

- projeto arquitetônico: aspectos funcionais (como dimensão e iluminação) e estéticos;
- carregamento atuante: permanente ou variável;
- condições de fabricação, transporte e montagem da estrutura;
- tipo de material.

Admitindo que os sistemas estruturais são modelos em reposta à análise estrutural, os quais podemos classificá-los quanto à sua dimensão ou geometria, temos:

- barra: sistema com 2 dimensões iguais com uma 3ª maior que as demais;
- barra de elementos delgados: sistema no qual as 3 dimensões são distintas entre si;
- folhas ou lâminas: sistema com 2 dimensões de mesma dimensão, sendo essas de maior dimensão que a 3ª. Esse tipo de sistema pode ser subdividido em:
 - placa;
 - chapa;
 - casca;
 - bloco.

Para que esse sistema estrutural não se mova em determinados pontos na peça (rotação ou translação), são utilizados elementos chamados de vínculos, os quais podem ser classificados em:

- apoio simples ou de 1º gênero: restringe o deslocamento vertical (R_v), permitindo o deslocamento horizontal e a rotação da estrutura, ou seja, possui uma reação de apoio no comando do deslocamento bloqueado.

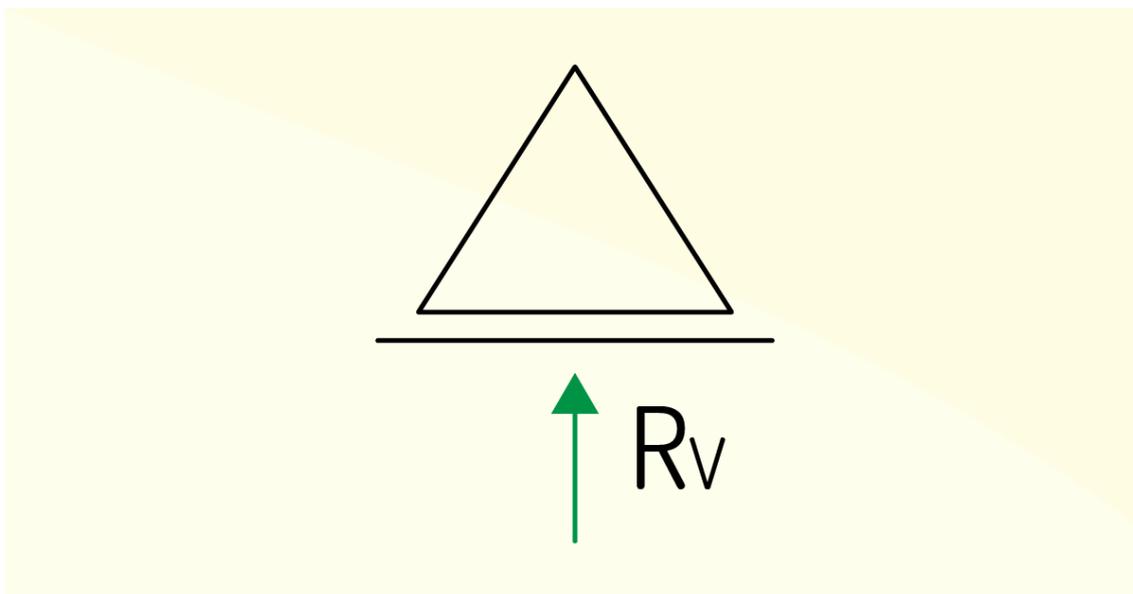


Figura 2.1 - Esquema de um vínculo de 1º gênero

Fonte: Elaborada pela autora.

- Articulação, rótula ou apoio de 2º gênero: restringe translações horizontal (R_h) e vertical (R_v), permitindo a rotação da estrutura, ou seja, possui duas reações de apoio na direção do comando dos deslocamentos bloqueados.

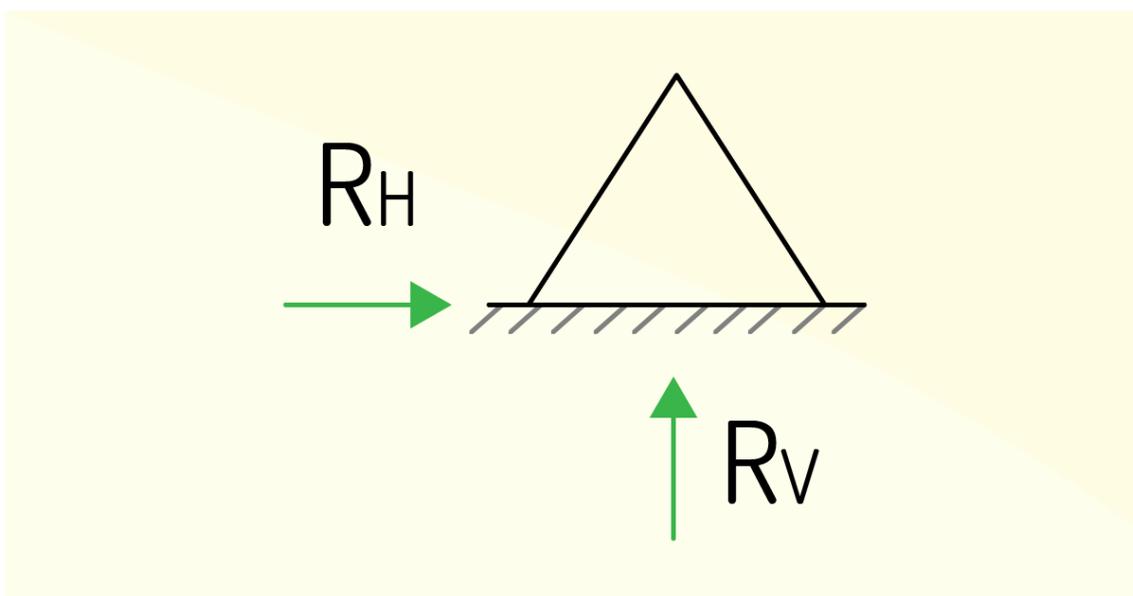


Figura 2.2 - Esquema de um vínculo de 2º gênero

Fonte: Elaborada pela autora.

- Engaste ou apoio de 3º gênero: restringe todos os movimentos de rotação e translação vertical e horizontal da estrutura, ou seja, possui três reações de apoio na direção do comando dos deslocamentos bloqueados.

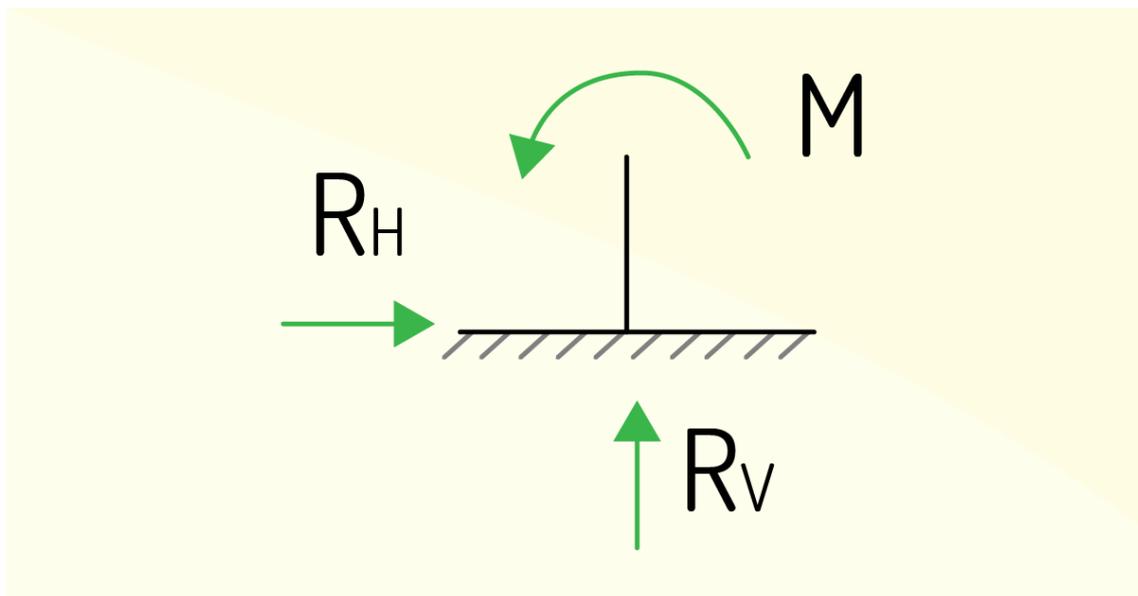


Figura 2.3 - Esquema de um vínculo de 3º gênero

Fonte: Elaborada pela autora.

São tipos de vínculos o cabo, a ligação esbelta, os roletes, as rótulas, a luva com articulação, a articulação, o apoio deslizante, a luva rígida e o apoio rígido.

Quando uma estrutura possui vínculos suficientes para impedir sua rotação e translação, dizemos que essa estrutura está restringida, nos permitindo entender sobre sua estaticidade e estabilidade. Lembrando que temos duas condições para o equilíbrio estático de uma estrutura:

- a soma de todas as forças que atuam sobre ela seja zero;
- a soma de todos os momentos ou torque em relação a um ponto qualquer dessa estrutura também seja zero.

A partir disso é possível entender que:

- a) se uma estrutura tem restrição e tem mesmo número de incógnitas e equações de equilíbrio, então dizemos que essa estrutura é do tipo **isostática**, ou seja, o número de reações de apoio é igual ao número de equações de equilíbrio disponíveis (sistema determinado);

- b) se a estrutura tem restrição e o número de equações de equilíbrio menor do que o número de incógnitas, então dizemos que essa estrutura é do tipo **hiperestática**, ou seja, o número de reações de apoio é maior do que o número de equações de equilíbrio disponíveis (sistema indeterminado);
- c) se a estrutura não tem restrição, então dizemos que essa estrutura é do tipo **hipoestática**, ou seja, o número de reações de apoio é menor do que o número de equações de equilíbrio disponíveis (sistema instável).

REFLITA

Cuidado para não equiparar os conceitos de equilíbrio e deformações. Uma estrutura pode estar em equilíbrio e, ainda assim, apresentar deformações. Como, por exemplo, um galho de uma árvore que se dobra/verga ante o efeito de um vento e, mesmo assim, está em equilíbrio, enquanto não sair do local.

Podemos descobrir se uma estrutura é restringida ou não a partir do seu grau de estaticidade ou hiperestaticidade (gh), Equação 1:

$$gh = C1 + 2 \cdot C2 + 3 \cdot C3 - 3 \cdot m \quad (1)$$

Em que $C1$ é o número de vínculos de 1º gênero; $C2$ é o número de vínculos de 2º gênero; $C3$ é o número de vínculos de 3º gênero; m é o número de hastes presentes na estrutura.

Ainda sobre o grau de hiperestaticidade, temos a Equação 2:

$$gh = ge + gi, \quad (2)$$

Em que ge é o grau de hiperestaticidade externa e gi é o grau de hiperestaticidade interna.

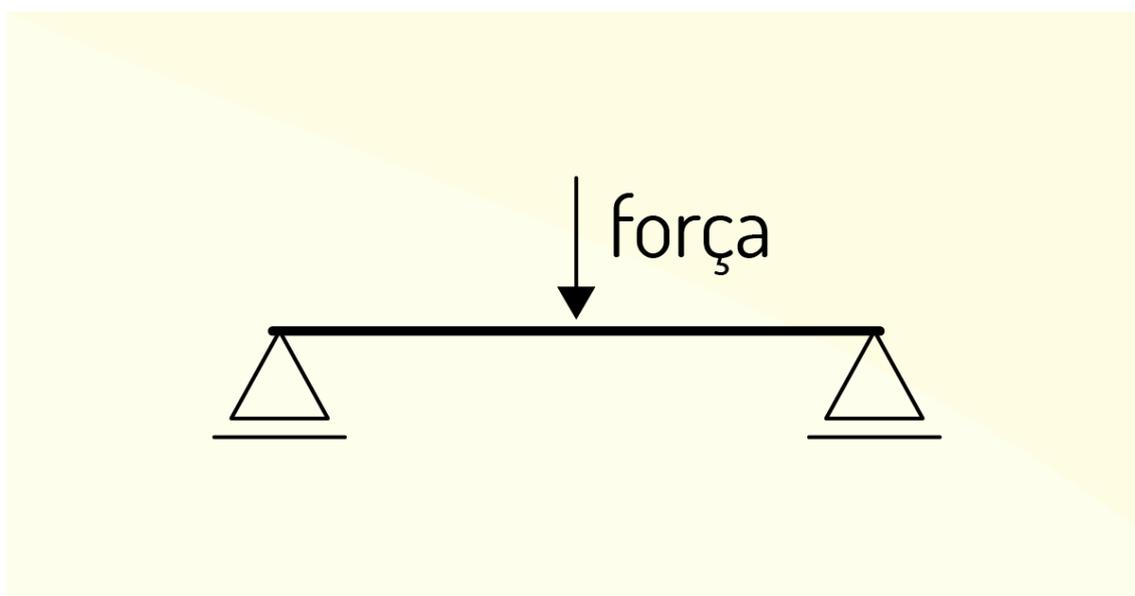
FIQUE POR DENTRO

Conhecer e identificar os mais diversos tipos de vínculos é essencial para sua aplicação em estruturas. Sendo assim, complemente seu estudo sobre os tipos de vínculo observando a Tabela 1.1, disponível na página 17, da 7ª edição do livro Resistência dos Materiais, de R. C. Hibbeler, disponível em:

<<http://souexatas.eng.br/livro-em-pdf-de-resistencia-dos-materiais-resistencia-dos-materiais-r-c-hibbeler-setima-edicao-7ed-pearson/>>. Acesso em: 30 jan. 2020.

ATIVIDADES

1) Uma estrutura é o conjunto de partes resistentes, ou seja, um corpo ou sistema de partes que suportam uma carga e certificam a estabilidade de um elemento do projeto de modo que sua análise permite a simplificação desses projetos em modelos estruturais. Sobre estruturas com vínculos, ou seja, estruturas com apoios, observe a figura a seguir.



Fonte: Elaborada pela autora.

É verdadeiro o que se afirma em:

- a) podemos perceber que essa estrutura possui 2 vínculos de 2º gênero.
- b) trata-se de uma estrutura hiperestática.
- c) o grau de estaticidade dessa estrutura é -1.
- d) por se tratar de uma estrutura isostática, essa é restringida.
- e) estrutura desse tipo possui apoio de 3º gênero, tendo movimentos restritos tanto de rotação quanto de translação.

Vigas

Pensando em estrutura isostática, podemos citar as vigas, “elementos lineares em que a flexão é preponderante” (ABNT, 2004), de modo que os esforços predominantes são conhecidos como momento fletor e força cortante.

Ainda podemos entender as vigas como elementos estruturais com direção horizontal, as quais transferem as cargas ao longo de seu comprimento para os suportes (nesses pontos, as cargas são transformadas em forças verticais), de modo que resistam além das cargas verticais, às forças de cisalhamento e momento de flexão.

As vigas são fabricadas em diversos materiais, como aço, ferro fundido, concreto armado, concreto protendido, madeira e alumínio, tendo as mais variadas aplicações nas construções. Tendo como referência os suportes, podemos tipificar as vigas.

- Viga universal: modelo de seção transversal do tipo *I* ou *H* eficiente para o transporte de cargas de flexão e cisalhamento, plano bastante comum principalmente em elementos de construção pré-moldados.



Figura 2.4 - Exemplo de viga do tipo *H*

Fonte: Tiero / 123RF.

- Viga treliçada: tem sua estrutura fortificada com a adição de cabos e varas, de modo que podem ser usadas tanto como suportes temporários quanto como suportes permanentes, visto que as aberturas na estrutura facilitam o uso em construções com concreto, possibilitando que esse as envolva e se fixe de maneira mais eficiente.



Figura 2.5 - Exemplo de viga do tipo treliçada

Fonte: Ondas de ruído / Wikimedia Commons.

- Viga quadril: esse tipo de estrutura forma um quadril inclinado cujas junções são de metal para o encaixe da estrutura apoiando outros feixes de carga tanto no telhado quanto nos beirais.



Figura 2.6 - Exemplo de uma viga quadril

Fonte: Ungvar / Freepik.

- Viga composta: estrutura formada a partir da combinação de dois ou mais materiais distintos, como as vigas de concreto-aço, ou seja, estrutura que combina vantagens de materiais com controle de custo.
- Viga rede aberta: estrutura muito utilizada em construções que necessitam de intervalos extensos com cargas de nível leve à moderada, bastante semelhante à viga treliçada, porém sua estrutura de suporte é constituída de uma rede aberta ao longo da viga.



Figura 2.7 - Exemplo de uma viga de rede aberta

Fonte: Foundry / Pixabay.

- Viga refrigerada: bastante utilizada para resfriar os espaços internos das construções, são vigas distribuídas ao longo do teto de maneira uniforme, de modo que à sua estrutura são ligadas bobinas de resfriamento de cobre (pelas quais passam água gelada) e aletas de alumínio (resfriam o ar pelo fenômeno de convecção).
- Viga simples: tipo de estrutura utilizada como complemento à outra, de modo que forneça descanso livre no suporte de outra viga ou de um conjunto delas.
- Viga fixa: estrutura que possui suas extremidades fixas, usada em conjunto com outras vigas ou materiais na construção.
- Viga de escoramento: estrutura com uma das extremidades livre e outra fixa, esta formando um ângulo ou reta, podendo ser usada em conjunto com outra viga ou material na construção.

- Viga continuamente suportada: estrutura na qual são adicionados dois suportes espalhados ao longo da viga em forma de colunas, usada em conjunto com outra viga ou material na construção.



Figura 2.8 - Exemplo de uma viga continuamente suportada

Fonte: Hywit Dimyadi / 123RF.

No que diz respeito à aplicação das vigas, podemos tipificá-las em:

- Viga em balanço: estrutura isostática com apoio unitário, o qual, obrigatoriamente, deve ser um engaste fixo.

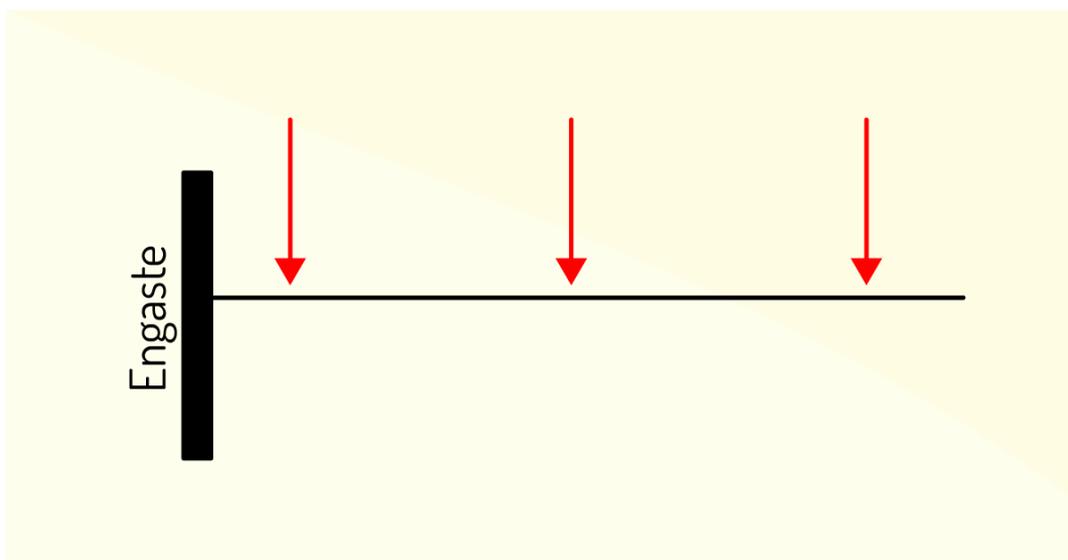


Figura 2.9 - Representação de viga em balanço

Fonte: Elaborada pela autora.

- Viga simplesmente apoiada: estrutura isostática com apoio fixo e um apoio móvel.

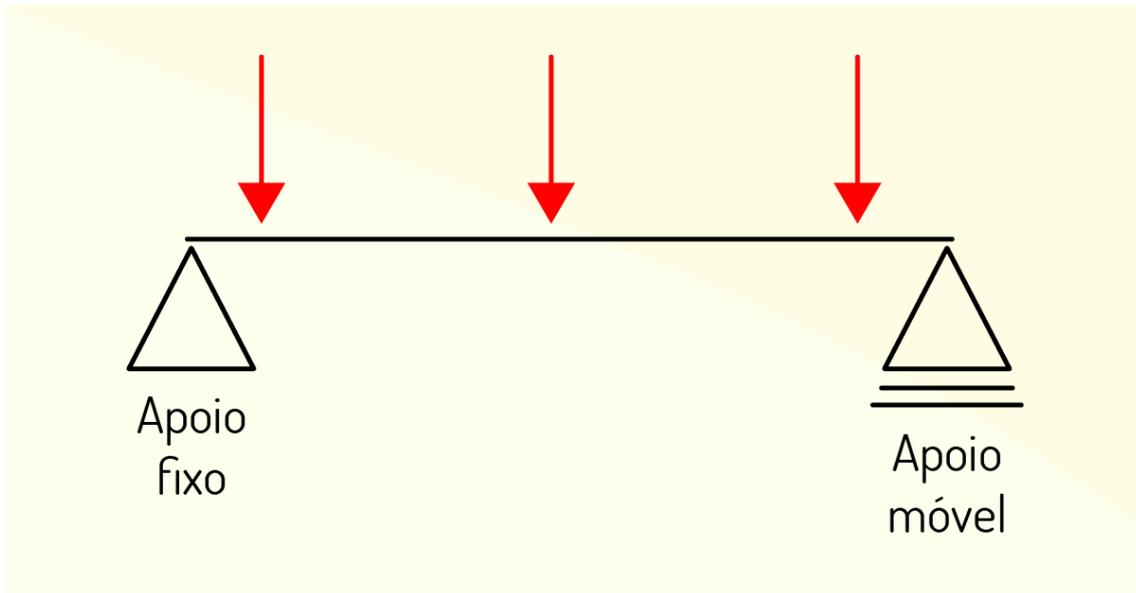


Figura 2.10 - Representação de viga simplesmente apoiada

Fonte: Elaborada pela autora.

- Viga biengastada: estrutura hiperestática com as duas extremidades engastadas.

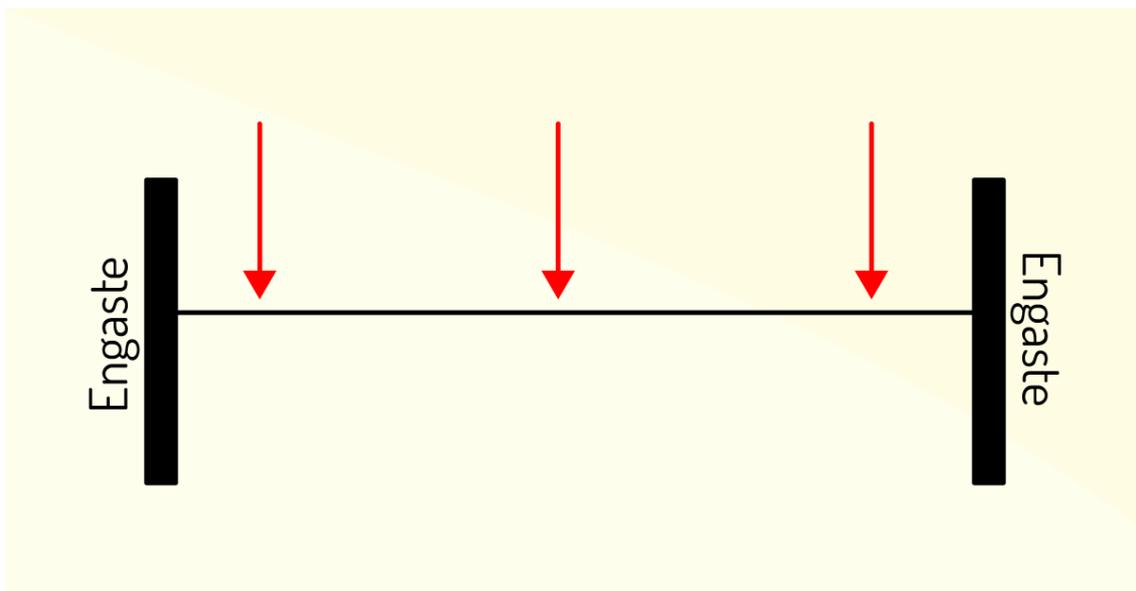


Figura 2.11 - Representação de uma viga biengastada

Fonte: Elaborada pela autora.

- Viga Gerber: estrutura articulada e isostática, sobre mais de dois apoios.

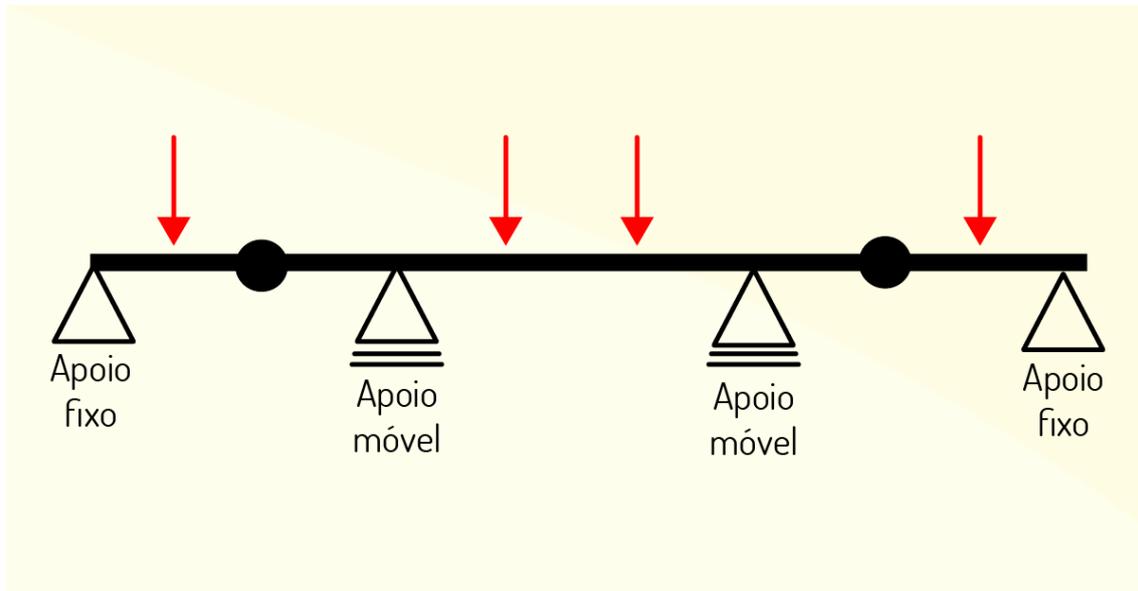


Figura 2.12 - Representação de uma viga Gerber

Fonte: Elaborada pela autora.

- Viga hiperestática: estrutura sobre mais de dois apoios.

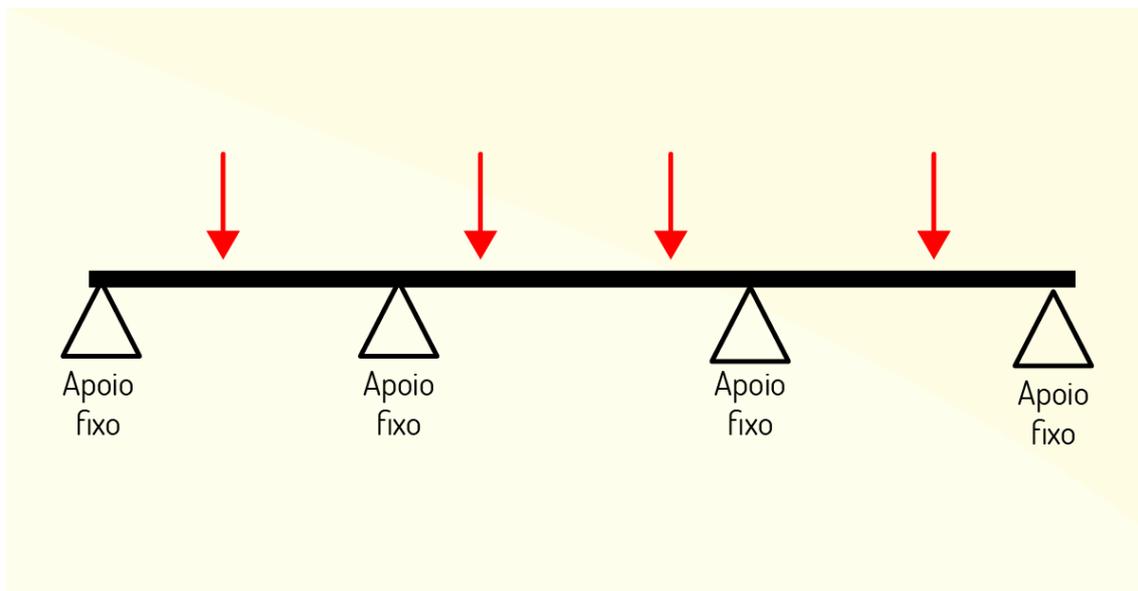


Figura 2.13 - Representação de uma viga hiperestática

Fonte: Elaborada pela autora.

- Viga balcão: estrutura de eixo curvo ou poligonal, com carregamento não pertencente ao plano formado pela viga.

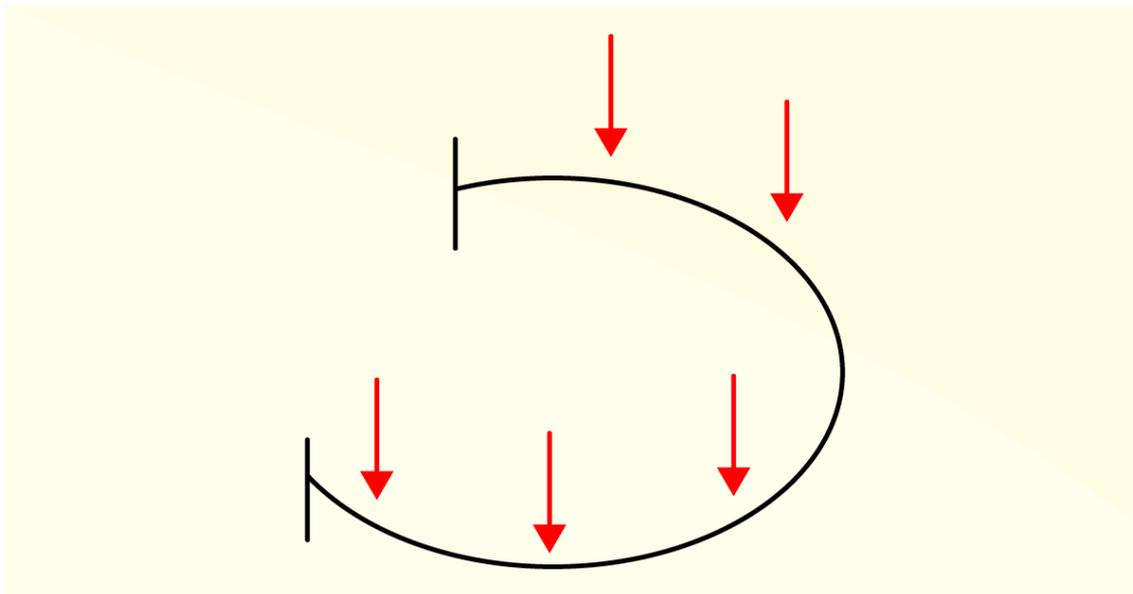


Figura 2.14 - Representação de viga balcão

Fonte: Elaborada pela autora.

- Viga coluna: estrutura em barra com solicitações de flexão e de compressão.

FIQUE POR DENTRO

Conhecer e identificar os mais diversos tipos de vigas é essencial para sua aplicação em estruturas. Sendo assim, complemente seu estudo sobre os tipos de vigas com o material de “Estabilidade das construções”, disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/edilbertoborja/estabilidade-das-construcoes/estabilidade-das-construcoes-superior-2/apostila-completa-vigas-isostaticas/vigas-isostaticas-apostila-completa-em-pdf>. Acesso em: 08 jan. 2020.

Comportamento estrutural

Agora que conhecemos os tipos de vigas e suas estruturas, podemos estudar seu comportamento estrutural. Sendo assim, pensando em uma viga sob ação de um esforço de momento fletor, podemos pensar simplificadamente em sua flexão. A flexão em uma viga é um tipo de tensão normal na direção axial da viga, logo o momento fletor gera tensões normais nessa estrutura.

Sendo os efeitos de compressão máximos e de tração concentrados nas partes externas da seção da viga, podemos afirmar que haverá maior concentração de material nessas áreas, pois qualquer material em um ponto intermediário a essas partes será menos requisitado, por conseguinte, utilizado de forma ineficiente. Desse modo, se for possível concentrar esse material nas bordas e a área dessa borda satisfizer a resistência, a compressão e a resistência à tração, temos que todo o material seria solicitado na sua máxima capacidade, implicando em uma seção mais eficiente e econômica. Porém as situações de carregamento nas vigas são as mais diversas, entre elas, podemos citar a força cortante ou força de cisalhamento, de modo que a utilização de áreas externas não é suficiente para haver melhorias na resistência ao esforço cortante.

O esforço cortante gera tensões de cisalhamento existente tanto vertical quanto horizontalmente ao longo da viga (HIBBELER, 2010).

- Cisalhamento vertical: comportamento percebido ao cortar uma viga ao longo de sua seção transversal, ou seja, observarmos o escorregamento entre essas as fatias das seções transversais. Com isso, a viga ficaria impossibilitada de sustentar forças na direção vertical caso não fosse promovida alguma resistência a esse cisalhamento vertical.
- Cisalhamento horizontal: pensando no corte horizontal de uma viga ao longo de seu eixo longitudinal e aplicando a ela uma força vertical, observarmos que essas fatias também penderiam para o escorregamento umas sobre as outras, nos permitindo ver a existência de esforços internos (cisalhamento horizontal) na viga comum de modo que fosse possível suportar os efeitos da força cortante citada.

A viga em uma construção estará submetida a diversas cargas, como às cargas concentradas, às cargas distribuídas ou à combinação delas.

As cargas distribuídas podem ser trocadas por uma carga concentrada, a qual atuaria no centro gravitacional do carregamento, de modo que essa ação facilitaria seu cálculo. Sendo assim:

- carga concentrada é o nome da carga correspondente à sua aplicação em um único ponto da estrutura;
- carga distribuída é o nome da carga correspondente à sua aplicação por unidade de comprimento, ou seja, em quilograma força por metro (kgf/m) ou Newton por centímetro (N/cm), de modo que a constância dessa carga significa sua distribuição uniforme sobre a estrutura.

Seções Transversais Usualmente Empregadas

Seções transversais (também conhecidas como seções planas ou retas) são a intersecção de um corpo no espaço em três dimensões com um plano. Dependendo do material, há tipos de seções transversais mais usuais na construção de vigas, as quais são consideradas de acordo com sua eficácia. Vigas confeccionadas em aço ou alumínio possibilitam maior inércia à flexão, pois afastam as áreas do centro de gravidade, resultando na redução da intensidade de tensão normal e de cisalhamento na viga. O uso de metais na construção de viga possibilita a formação de seções com espessuras reduzidas a partir de elementos delgados, gerando maior economia de material, e isso só é possível devido à sua resistência, ao módulo de elasticidade, que é elevado, e à sua homogeneidade. Nesse caso, é possível fazer a ligação de seus elementos ainda na fabricação por meio da solda, dentre outras.

No caso de seções em madeiras, estas não devem ser construídas com a mesma ordem de dimensão, pois, comparadas aos metais, possuem menor resistência e módulo de elasticidade; desse modo, é pertinente que as ligações sejam realizadas por meio de ligações coladas, pregos e parafusos, cuidando para que haja a menor deformação possível dessa ligação, a qual afetará a resistência e a inércia para a flexão da viga.

As seções confeccionadas em concreto possuem mais dimensões quando comparadas às de madeira e metal, isso se deve exatamente às dimensões dos componentes do concreto, como armaduras, no caso do concreto armado ou protendido; e aos agregados, comparados às dimensões dos elementos de seção delgada.

REFLITA

A Casa, de Vinícius de Moraes

Era uma casa

Muito engraçada

Não tinha teto

Não tinha nada

Ninguém podia

Entrar nela, não

Porque na casa

Não tinha chão

Ninguém podia

Dormir na rede

Porque na casa
Não tinha parede
Ninguém podia
Fazer pipi
Porque penico
Não tinha ali
Mas era feita
Com muito esmero
Na Rua dos Bobos
Número Zero (MORAES, *on-line*).

Assim, vigas construídas de aço ou alumínio, cujos elementos são delgados, possuem espessuras medianas, quando usadas em madeiras; e robustas, quando usadas em concreto armado.

A seguir, verificaremos as seções mais utilizadas na construção civil.

- Seções retangulares maciças ou vazadas: mais comuns em elementos construídos em madeira e concreto armado, pois possuem maior comercialização e facilidade de aplicação devido ao bom desempenho da seção e seu baixo custo.
- Seções circulares maciças ou vazadas: esse tipo de seção pode ter diversas formas, como circular, retangular, triangular, trapezoidal, dentre outras, sendo comumente aplicadas em resposta às solicitações de torção na viga. São fabricadas em qualquer material desde que esse seja estrutural, tendo como especificações a espessura dos elementos e os meios de ligação desses em função do próprio material utilizado.
- Seção em I e H: são vistas e aplicadas em vigas de aço em perfil laminado ou soldado, de modo que sua aplicação pode ser combinada à madeira e ao concreto armado ou protendido, segundo técnicas de pré-fabricação.
- Seção T, L e C: são utilizadas em situações restritas ou específicas de acordo com a demanda do projeto.

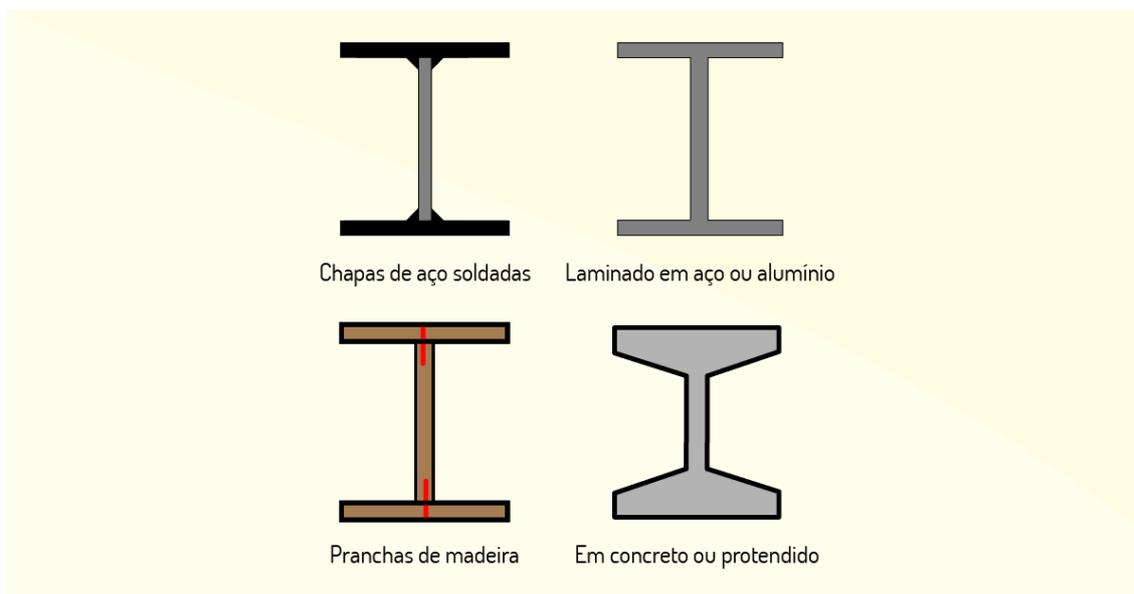


Figura 2.15 - Representações das seções em diversos materiais

Fonte: Elaborada pela autora.

Percebemos que o tipo de material deve ser condizente com o tipo de estrutura que se deseja utilizar em uma construção, pois os projetos devem considerar além da logística estrutural, o custo e, até mesmo, a beleza da construção.

ATIVIDADES

2) Sabemos que as vigas são elementos estruturais usados para distribuir as cargas aplicadas a elas ao longo do seu comprimento, sendo confeccionadas de madeira, metal ou concreto. Sendo assim, assinale a alternativa correta.

- Podemos classificar as vigas por meio dos materiais dos quais são confeccionadas, sendo a viga universal e a treliçada exemplos desse tipo de classificação. A classificação das vigas é feita exclusivamente por meio de sua matéria-prima e beleza a ser exibida no projeto.
- São exemplos de vigas, de acordo com sua aplicação, biengastada, Gerber e em balanço.
- O momento fletor em uma viga é oriundo da ação de um esforço de relaxação da viga.
- O esforço cortante em uma viga gera tensões de cisalhamento em apenas uma direção da viga, no caso, a horizontal.
- A viga em uma construção está submetida somente a um tipo de carga, a concentrada, ou seja, carga aplicada em um único ponto da estrutura.

Forças em Vigas

A projeção e a utilização de uma viga em um projeto devem seguir alguns requisitos iniciais em relação:

- ao material como concreto, aço e seu cobrimento;
- à forma estrutural do tabuleiro, com dimensões pré-definidas em projeto;
- à medida do pé direito, ou seja, em relação à distância até o andar superior;
- ao comportamento do apoio das lajes;
- às cargas das paredes (por metro quadrado);
- às proporções das seções transversais das vigas, definidas no pré-dimensionamento.

Após os dados iniciais, precisamos considerar a estaticidade, os vãos e as dimensões ou proporções das seções transversais, respeitando:

- a vinculação da viga: a qual será considerada em relação ao seu apoio nos pilares e, posteriormente, à sua ligação com os pilares de extremidade;
- a existência de vão livre e vão teórico: de modo que o vão livre é dado pela distância entre as faces do apoio; o vão efetivo ou vão teórico é dado pela distância entre os eixos do apoio. Vale lembrar que em vigas do tipo balanço, o vão livre é a distância entre a extremidade livre e a face externa do apoio, e o vão teórico é a distância até o centro do apoio.

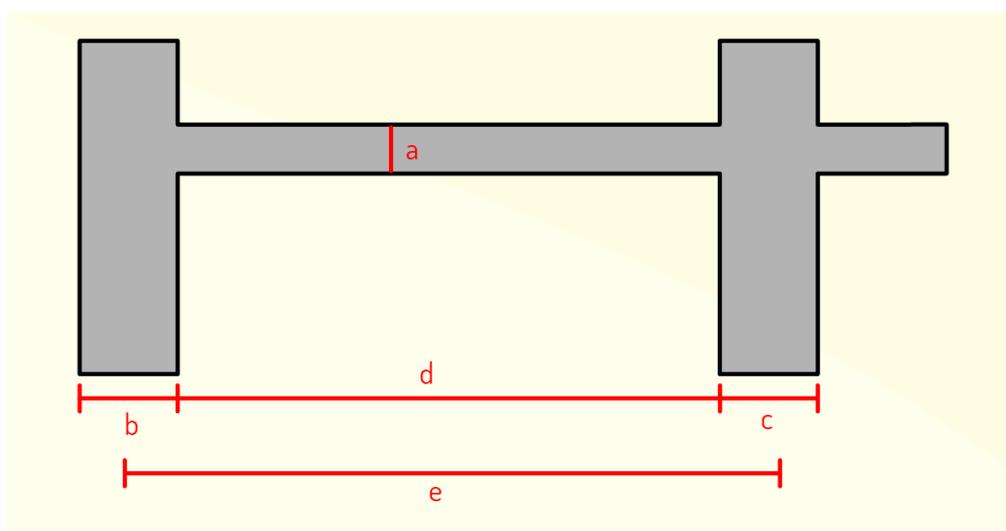


Figura 2.16 - Representação de vão livre e vão teórico

Fonte: Elaborada pela autora.

Analisando a Figura 2.16, nota-se que **a** corresponde à altura da viga (**h**); **b** e **c** correspondem aos apoios da viga (**t1** e **t2**); **d** corresponde ao vão livre (**l0**) e **e** corresponde ao vão efetivo (**lef**), de modo que o vão efetivo pode ser calculado por meio de $lef = l0 + a1 + a2$; em que **a1** é igual ao menor valor entre $t1 / 2$ e $0,3h$ e **a2** igual a $t2 / 2$.

Além disso, é importante fazer uma pré-análise das dimensões das vigas antes de se iniciar o projeto, pois não é permitido que elas apresentem largura inferior a 12 centímetros. A exceção acontece para uma largura **L** na qual $10 < L < 12$, de modo que o projeto respeite o item 13.2.2 da NBR 6118 (ABNT, 2004), na qual são citados:

- o alojamento das armaduras e suas interferências com as armaduras de outros componentes estruturais, considerando os espaçamentos e as coberturas da norma citada acima.
- o lançamento e o modo vibracional do concreto considerados na NBR 14931.

Vale lembrar que a largura da viga é calculada de modo que essa fique embutida na estrutura da parede onde será colocada, sendo adotadas larguras maiores para os casos de grandes vãos ou de tramos muito carregados, de modo que o impacto na arquitetura e estrutura da construção seja amenizado. Além disso, as vigas não devem interferir nos espaços de portas (as quais possuem 2,20 metros de altura) e janelas, de modo que o cimbramento deve ser considerado de acordo com a padronização das alturas das vigas, não sendo comum o uso de duas alturas distintas, o que pode acarretar na necessidade de aplicação de uma armadura dupla em alguns pontos da estrutura. Em se tratando dos tramos carregados e maiores vãos, há necessidade de verificação constante de suas flechas, que são deformações ao longo do eixo longitudinal da viga.

Cargas em Vigas

Geralmente, as cargas existentes em uma viga são provenientes do seu próprio peso, das reações de apoio das lajes e do peso das paredes relacionadas a elas. Porém essas três situações não são únicas quando tratamos de cargas em uma viga. Além delas, podemos citar as cargas provenientes de pilares em vigas de transição ou vigas de fundação, de modo que as demais cargas que possam sobrecarregar a viga são uniformemente distribuídas por ela.

Esforços Internos em Vigas: Esforço Cortante e Momento Fletor

Entendemos como esforços internos as ligações internas de tensões em uma estrutura, ou seja, as tensões ao longo de sua seção transversal. Esses esforços representam o efeito de forças e momentos entre duas frações de uma estrutura reticulada dada pelo corte em uma seção transversal, de modo que esses são iguais e contrários, correspondendo a uma ação e reação.

Esforços Cortantes

O esforço interno, conhecido como esforço cortante (Q), é resultante de forças de uma parte isolada sobre a outra na direção transversal ao eixo da barra na seção transversal de corte. O esforço cortante é representado pelo efeito de força cisalhante presente na seção transversal da viga.

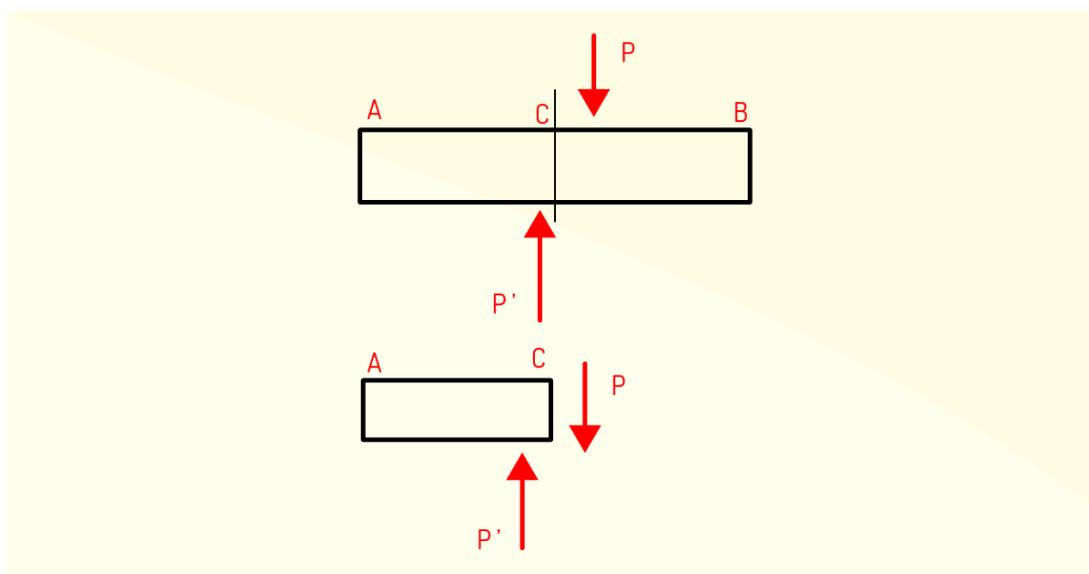


Figura 2.17 - Representação de esforço cortante Q

Fonte: Elaborada pela autora.

A máxima força cortante V_{Sd} , na face do apoio, não deve ultrapassar a força cortante última V_{Rd2} , relativa à ruína das bielas comprimidas de concreto (item 17.4.2.2 da NBR 6118 – ABNT, 2004), de modo que:

$$V_{Rd2} = 0,27 \alpha_{v2} f_{cd} b_w d$$

$$\text{onde } \alpha_{v2} = (1 - f_{ck}/250), f_{ck} \text{ em MPa}$$

$$\text{ou } \alpha_{v2} = (1 - f_{ck}/25), f_{ck} \text{ em kN/cm}^2$$

Ainda, f_{cd} é dada pela resistência de cálculo do concreto; b_w é dada pela menor largura da seção, compreendida ao longo da altura útil; e d é a altura útil da seção, ou seja, é igual à medida da borda comprimida ao centro de gravidade da armadura de tração.

Os esforços cortantes são dados como positivos quando as forças à esquerda de uma seção transversal estiverem entrando e a resultante das forças na direção transversal apresentar o sentido para cima; ainda, quando forças à direita de uma seção transversal estiverem entrando e a resultante das forças na direção transversal apresentar o sentido para baixo. Se o esforço for contrário ao indicado, dizemos que esse é negativo.

A variação dos esforços cortantes por toda a extensão longitudinal da seção transversal de uma estrutura é melhor representada a partir de um diagrama de esforços cortantes. De modo que, convencionalmente, o desenho é elaborado de modo que os valores positivos cortantes são traçados ao lado das fibras superiores da barra/viga e negativos, do outro lado. Quando se trata de uma viga do tipo biapoiada, cuja carga é centralizada, determinamos o seu diagrama a partir das situações (1) e (2).

- (1) Seção S à esquerda da carga concentrada ($x < a$).

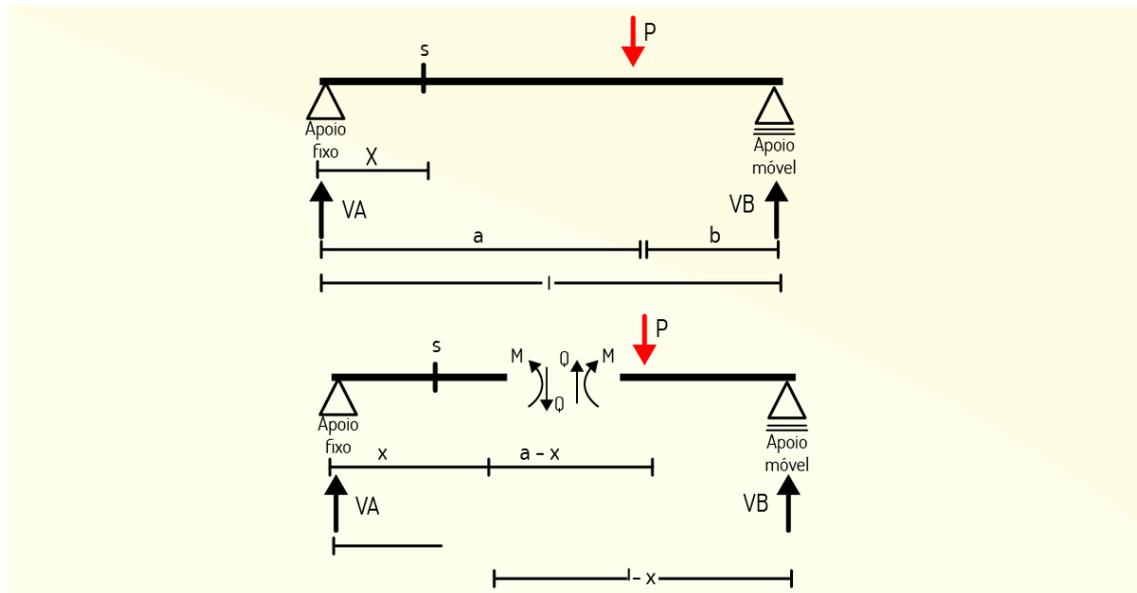


Figura 2.18 - Representação de seção à esquerda da carga concentrada para $x < a$

Fonte: Elaborada pela autora.

- (2) Seção S à direita da carga concentrada ($x > a$).

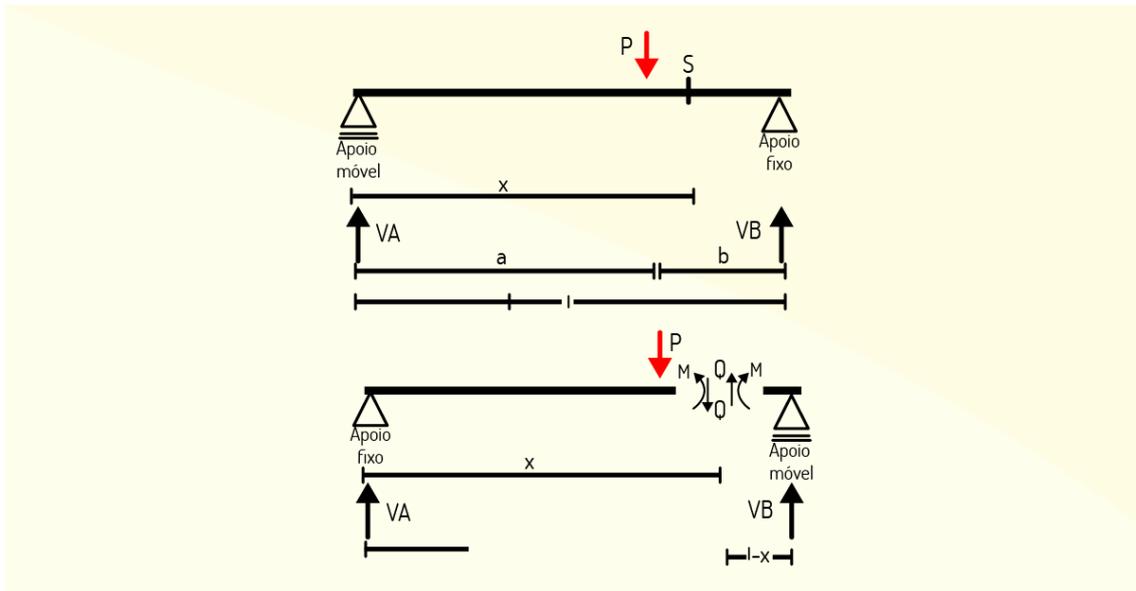


Figura 2.19 - Representação de seção à esquerda da carga concentrada para $x > 2$

Fonte: Elaborada pela autora.

O diagrama de esforços cortantes resultará em descontinuidade sob o ponto de aplicação da carga, como você pode ver na Figura 2.20.

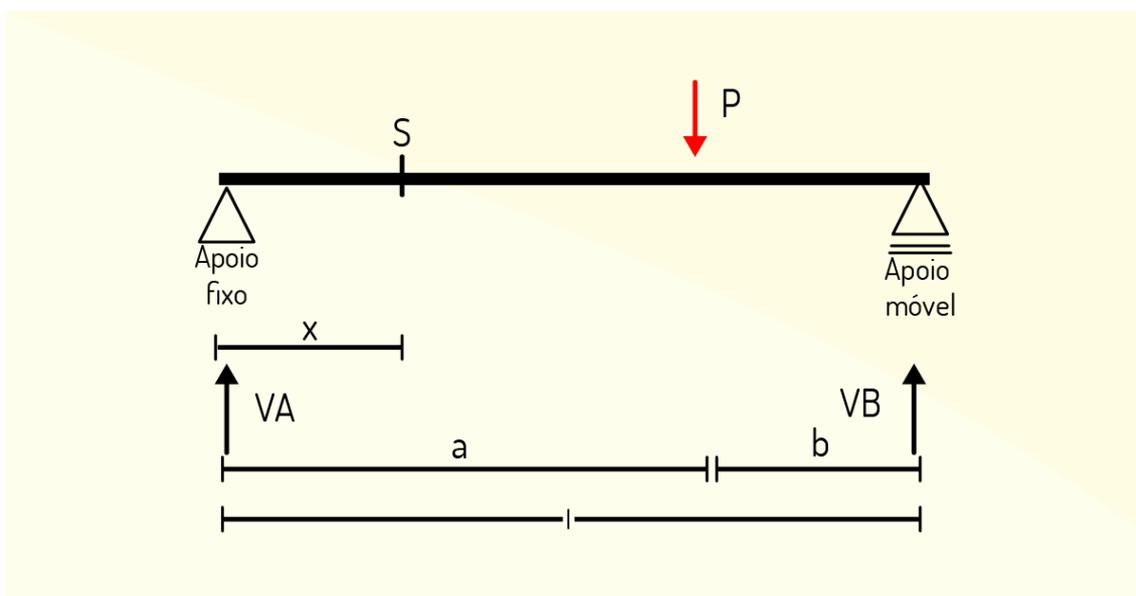


Figura 2.20 - Representação de diagrama de esforço cortante em uma viga

Fonte: Elaborada pela autora.

Podemos observar que o valor da descontinuidade do diagrama condiz com o valor da carga concentrada P aplicada (BOTELHO, 1998).

Momento Fletor

Momento fletor (M) é conhecido como o momento resultante de todas as forças presentes na viga juntamente com os momentos de uma parte isolada sobre a outra na direção transversal ao eixo da viga na seção transversal de corte, ou seja, representa a capacidade de flexionar ou dobrar em uma seção transversal de uma viga.

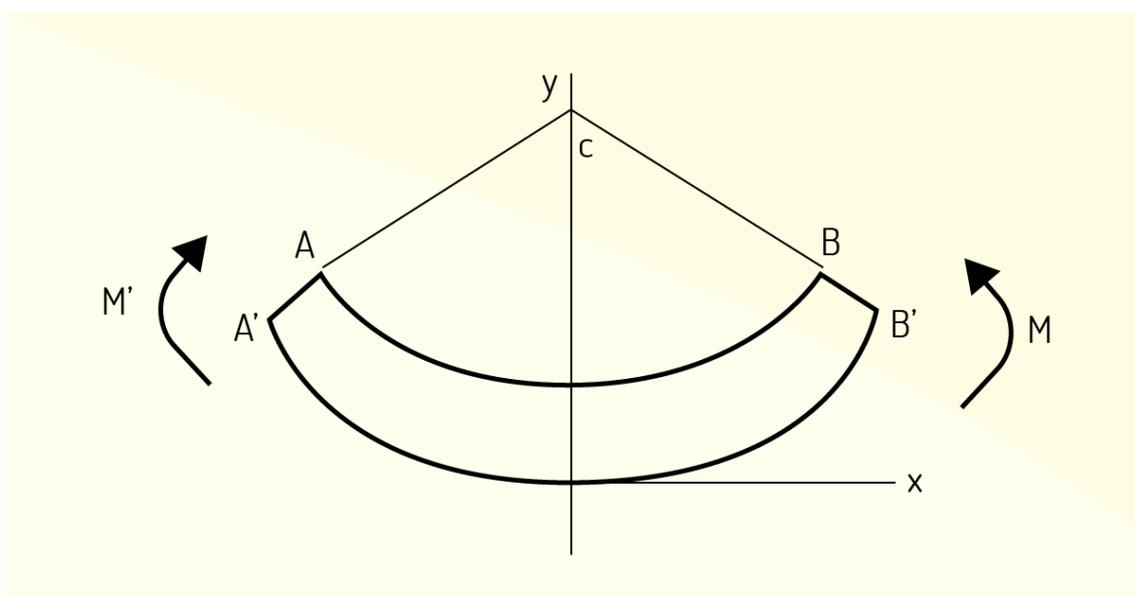


Figura 2.21 - Representação do momento fletor de uma viga

Fonte: Elaborada pela autora.

O momento limite para armadura simples é dado por $M_{d,lim} = \frac{b \cdot d^2}{K_{c,lim}}$, em que $K_{c,lim}$ é valor de k_c correspondente ao limite entre os domínios 3 e 4 (ver Tabela 2.1). Verificamos que $M_{d,lim} = \frac{b \cdot d^2}{K_{c,lim}}$ explana o momento limite para a armação, na qual k_c tem seu valor correspondente entre os domínios 3 e 4 verificáveis na Tabela 2.1.

FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES													
$\beta_c = \frac{x}{d}$	$K_c = \frac{bd^2}{M_d} (cm^2/kN)$									$k_s = \frac{A_s d}{M_d} (cm^2/kN)$			Domínio
	C10	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-25	CA-50	CA-60	
0,02	103,8	69,2	51,9	41,5	34,6	29,7	25,9	23,1	20,8	0,046	0,023	0,019	2
0,04	52,3	34,9	26,2	20,9	17,4	15,0	13,1	11,6	10,5	0,047	0,023	0,020	
0,06	35,2	23,4	17,6	14,1	11,7	10,1	8,8	7,8	7,0	0,047	0,024	0,020	
0,08	26,6	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,7	5,9	5,3	0,048	0,024	0,020	
0,10	21,5	14,3	10,7	8,6	7,2	6,1	5,4	4,8	4,3	0,048	0,024	0,020	
0,12	18,0	12,0	9,0	7,2	6,0	5,2	4,5	4,0	3,6	0,048	0,024	0,020	
0,14	15,6	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,049	0,024	0,020	
0,16	13,8	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,8	0,049	0,025	0,021	
0,18	12,3	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,050	0,025	0,021	
0,20	11,2	7,5	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	0,050	0,025	0,021	
0,22	10,3	6,8	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,3	2,1	0,050	0,025	0,021	
0,24	9,5	6,3	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,1	1,9	0,051	0,025	0,021	
0,26	8,8	5,9	4,4	3,5	3,0	2,5	2,2	2,0	1,8	0,051	0,026	0,021	
0,28	8,3	5,5	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	1,8	1,7	0,052	0,026	0,022	
0,30	7,8	5,2	3,9	3,1	2,6	2,2	2,0	1,7	1,6	0,052	0,026	0,022	
0,32	7,4	4,9	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,6	1,5	0,053	0,026	0,022	
0,34	7,0	4,7	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4	0,053	0,027	0,022	
0,36	6,7	4,5	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	0,054	0,027	0,022	
0,38	6,4	4,3	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	1,4	1,3	0,054	0,027	0,023	

0,40	6,1	4,1	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4	1,2	0,055	0,027	0,023
0,42	5,9	3,9	3,0	2,4	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,055	0,028	0,023
0,438	5,7	3,8	2,9	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,1	0,056	0,028	0,023
0,44	5,7	3,8	2,8	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,1	0,056	0,028	
0,46	5,5	3,7	2,7	2,2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1	0,056	0,028	
0,48	5,3	3,5	2,7	2,1	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1	0,057	0,029	
0,50	5,2	3,4	2,6	2,1	1,7	1,5	1,3	1,1	1,0	0,058	0,029	
0,52	5,0	3,3	2,5	2,0	1,7	1,4	1,3	1,1	1,0	0,058	0,029	
0,54	4,9	3,2	2,4	2,0	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,059	0,029	
0,56	4,7	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,059	0,030	
0,58	4,6	3,1	2,3	1,9	1,5	1,3	1,2	1,0	0,9	0,060	0,030	
0,60	4,5	3,0	2,3	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,061	0,030	
0,628	4,4	2,9	2,2	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,061	0,031	
0,64	4,3	2,9	2,2	1,7	1,4	1,2	1,1	1,0	0,9	0,062		
0,68	4,2	2,8	2,1	1,7	1,4	1,2	1,0	0,9	0,8	0,063		
0,72	4,0	2,7	2,0	1,6	1,3	1,2	1,0	0,9	0,8	0,065		
0,76	3,9	2,6	2,0	1,6	1,3	1,1	1,0	0,9	0,8	0,066		
0,772	3,9	2,6	1,9	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,8	0,067		

De acordo com a NBR 6118:2004.

Diagrama retangular de tensões no concreto $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$.

Para $\gamma_c \neq 1,4$ multiplicar b por $1,4 / \gamma_c$ antes de usar a tabela.

Tabela 2.1 - Valores de flexão simples para seções retangulares

Fonte: Adaptada de Moreira e Pinheiro (1993, p. 1).

Para o valor de $M_{d,máx} \leq M_{d,lim}$ podemos utilizar armadura simples; para o valor $M_{d,máx}$ até uma ordem de $1,2 \cdot M_{d,lim}$ podemos utilizar armadura dupla (para o caso de aço do tipo CA-50). Quando os valores de $M_{d,máx}$ forem máximos, poderemos ou aumentar a seção da viga ou utilizaremos uma seção T como alternativa. Podemos, ainda, reduzir o momento fletor a partir da alteração da vinculação, do vão ou da carga; ou aumentar a resistência do concreto, processo menos viável, pois, geralmente, adotamos a mesma resistência do concreto para todos os elementos estruturais.

Os valores dos momentos fletores serão positivos quando a entrada das forças e momentos à esquerda de uma seção transversal tiverem como resultante de momento na seção o sentido horário. E momentos fletores serão positivos quando a entrada das forças e momentos à direita seção transversal também tiverem como resultante de momento na seção o sentido anti-horário. Para o contrário ao indicado, o momento fletor será negativo.

O diagrama de momentos fletores é uma forma de representar graficamente a variação dos momentos fletores ao longo das seções transversais da estrutura. De modo que, convencionalmente, o desenho é elaborado de maneira que os valores positivos de momentos fletores são traçados ao lado das fibras inferiores da barra/viga e negativos do outro lado. Quando se trata de viga do tipo biapoiada, cuja carga é centralizada, determinamos o seu diagrama a partir das situações (1) e (2) vista em esforços cortantes.

FIQUE POR DENTRO

Os cálculos a serem realizados sobre esforço cortante e momento fletor podem gerar bastante dúvidas. Sendo assim, complemente seu estudo assistindo à videoaula “Diagrama de esforços cortantes e momento fletor exercícios resolvidos (passo a passo)”, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=2ECOqeZDGLQ>. Acesso em: 08 jan. 2020.

O diagrama de momentos fletores é contínuo, ou seja, com resultados das situações (1), e (2) condizem na seção do ponto de aplicação da carga concentrada P.

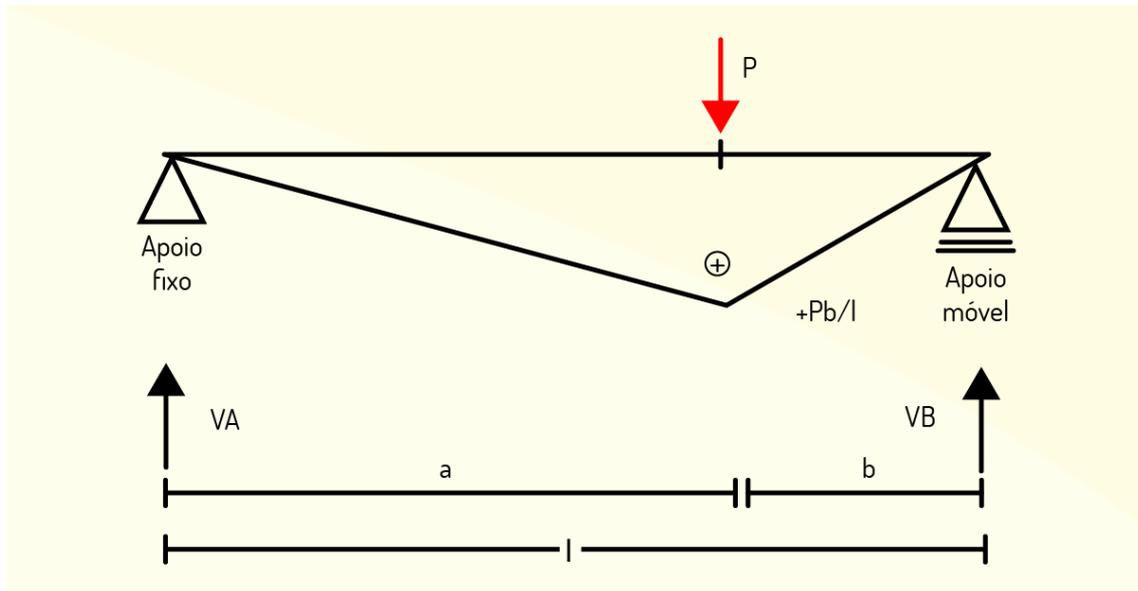


Figura 2.22 - Representação de diagrama de momento fletor em uma viga

Fonte: Elaborada pela autora.

A partir daí, podemos observar também que o diagrama apresenta uma protuberância no ponto de aplicação de P, de modo que o valor máximo de momento fletor para essa seção é dado quando $M_{\text{máx}} = +Pab/l$.

Relação entre Carga, Força Cortante e Momento Fletor

Considerando um pequeno elemento distante dx em uma viga, teremos que, diante de uma pequena carga, o momento fletor e o esforço cortante variarão na ordem de x , apresentando valores distintos em relação ao lado direito e esquerdo.

Desse modo, ao estabelecermos o equilíbrio entre as forças presentes nesse segmento da viga, obteremos que sua somatória será descrita por $\sum F_y = 0 \uparrow \oplus$, de modo que $V - q \cdot dx - (V + dV) = 0$. Logo, podemos deduzir que $dV = -q \cdot dx$ e, portanto, $\frac{dV}{dx} = -q$. O que nos permite inferir que a taxa de variação do esforço cortante em relação a x terá o valor de $-q$. E para q com valor de zero, teremos que V apresentará um valor constante.

Em relação à somatória dos momentos, teremos $\sum M|_{\text{face esq.}} = 0 \oplus$, de modo que $-M + (M + dM) - (V + dV) \cdot dx - q \cdot dx \cdot \left(\frac{dx}{2}\right) = 0$ ou $-dM + V \cdot dx - dV \cdot dx - q \cdot \frac{(dx)^2}{2} = 0$.

Sabendo que os produtos diferenciais são desprezíveis, podemos chegar à seguinte conclusão $\frac{dM}{dx} = V$, ou seja, verificamos que a taxa de variação do momento fletor em relação a x deverá ser igual ao esforço cortante V para uma carga concentrada atuante na viga.

Logo, fazendo as operações necessárias, podemos chegar à conclusão de que

$\frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = -q$ ou $\frac{d^2M}{dx^2} = -q$. Desse modo, ao considerarmos que o momento máximo ocorrerá para $\frac{dM}{dx} = 0$, veremos que $V = 0$.

Considerando agora, uma carga distribuída de modo que a seja maior do que zero e que seu sentido seja positivo quando estiver para baixo $\downarrow \oplus$, teremos que o esforço cortante será dado por $V =$

$\frac{a.L}{2} - a.x$ e $\frac{dV}{dx} = -a$. A somatória dos momentos é dada por $\sum M_i = 0 \oplus$, ou seja, $\frac{a.L}{2}.x + a \frac{x^2}{2} + M_5 = 0$. , portanto, para $X = 0 \rightarrow M_5 = 0, X = l \rightarrow M_5 = 0$ e $x = \frac{L}{2} \rightarrow M_5 = \frac{a.L^2}{8}$. Vale

lembrar que:

- para força cortante inexistente na viga, então $\frac{dM}{dx} = 0$ e M será uma constante;
- descontinuidades nos diagramas de esforço cortante serão resultado da concentração de cargas. A concentração de cargas acarretará descontinuidade no diagrama de esforço cortante;
- descontinuidades nos diagramas de momento fletor serão resultado de binários, os binários causarão descontinuidade no diagrama de momento fletor;
- quando apenas cargas distribuídas forem atuantes na viga ou entre cargas concentradas, então, $\frac{dV}{dx} = -q$ será condição para cargas distribuídas ou concentradas e atuantes nas vigas;
- quando $q = 0 \rightarrow V = constante$;
- quando $q = k \rightarrow V = Kx + c$, indicando que há variação linear com x, de modo que o diagrama de esforço cortante se apresenta como uma reta;
- quando $q = Kx \rightarrow V = k \frac{x^2}{2} + c$, indicando que há variação parabólica com x, de modo que o diagrama de esforço cortante se apresente como uma parábola do 2º grau.

Para o caso de cargas distribuídas atuantes na viga ou entre cargas concentradas, temos que $\frac{d^2M}{dx^2} = -q$, logo, podemos inferir que:

- para $q = 0 \rightarrow M = c_1x + c_2$, o qual será variável linearmente com x , de modo que o diagrama de momento fletor se apresenta como uma reta;
- para $q = K \rightarrow M = -\left(k\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2\right)$, teremos que o diagrama de momento fletor se apresentará como uma parábola do 2º grau;
- Para $q = Kx \rightarrow M = -\left(k\frac{x^3}{6} + c_1x + c_2\right)$, teremos que o diagrama de momento fletor se apresentará como uma parábola do 3º grau.

REFLITA

“Estudar não é fácil nem tão difícil assim, somente precisamos ser otimistas em encarar tal realidade” – Nelson Ty Napildy.

FIQUE POR DENTRO

Um bom material de apoio para melhor entendimento do conteúdo estudado é o livro “Introdução à isostática”, de Eloy Ferraz Machado Junior. O livro está disponível em: http://sinop.unemat.br/site_antigo/prof/foto_p_downloads/fot_8354intboduyyo_y_isostyica_-_eesc_esp_-_eloy_febbaz_machado_juniob_pdf.pdf. Acesso em: 08 jan. 2020.

A seguir, traremos alguns exercícios comentados, a fim de que possam auxiliar no conteúdo que tratamos até aqui. Vamos lá?

Dadas as estruturas a seguir, determine suas reações de apoio.

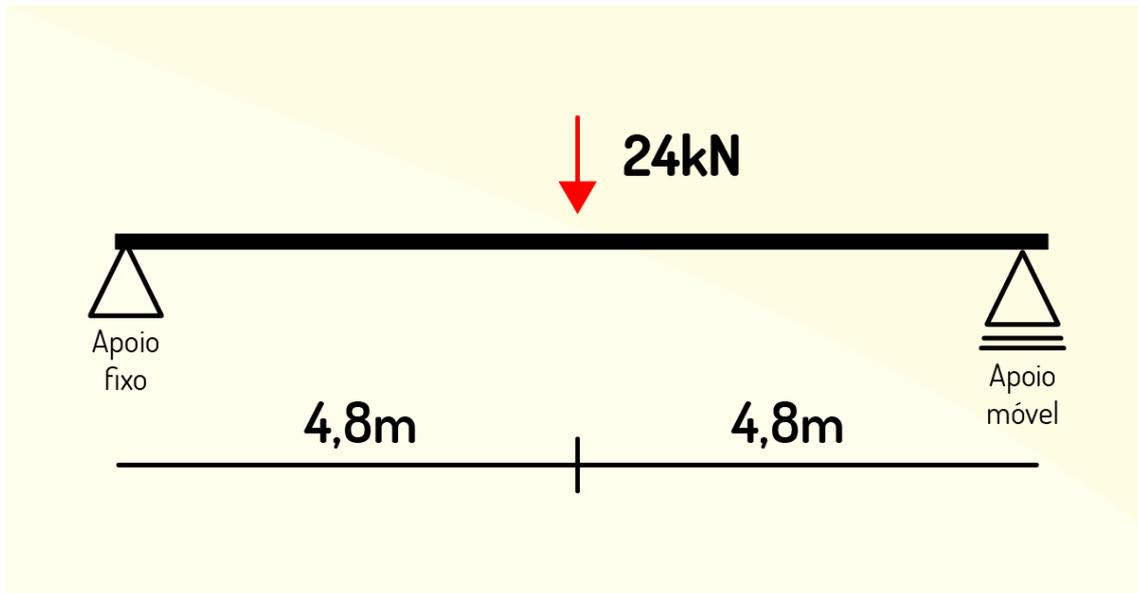


Figura 2.23 - Representação de uma viga com apoio fixo e apoio móvel, e uma força aplicada ao centro

Fonte: Elaborada pela autora.

Iniciaremos o exercício indicando as forças e identificando apoios de 1º e 2º gênero, os quais nos darão 2 reações (A_x e A_y) e 1 reação (B_y), respectivamente.

Teremos que encontrar a somatória das forças em x, em y e dos momentos, lembrando que todos são iguais a zero.

Desse momento, em y teremos:

$$\Sigma F_y = 0, \text{ logo, } A_y + B_y - 24 = 0$$

$$\text{De modo que } A_y + B_y = 24$$

Em x, teremos que:

$$\Sigma F_x = 0, \text{ logo, } A_x = 0$$

E em termos do momento no ponto A, admitiremos o sentido horário para o giro, e momento como sendo o produto entre a força e o braço de alavanca, temos:

$$\Sigma M_A = 0, \text{ logo, } 24 \cdot 4,8 - B_y \cdot 9,6 = 0$$

$$\text{De modo que } B_y = 12 \text{ kN}$$

Voltando à equação $A_y + B_y = 24$

Teremos que $A_y + 12 = 24$ kN

Logo, $A_y = 12$ kN

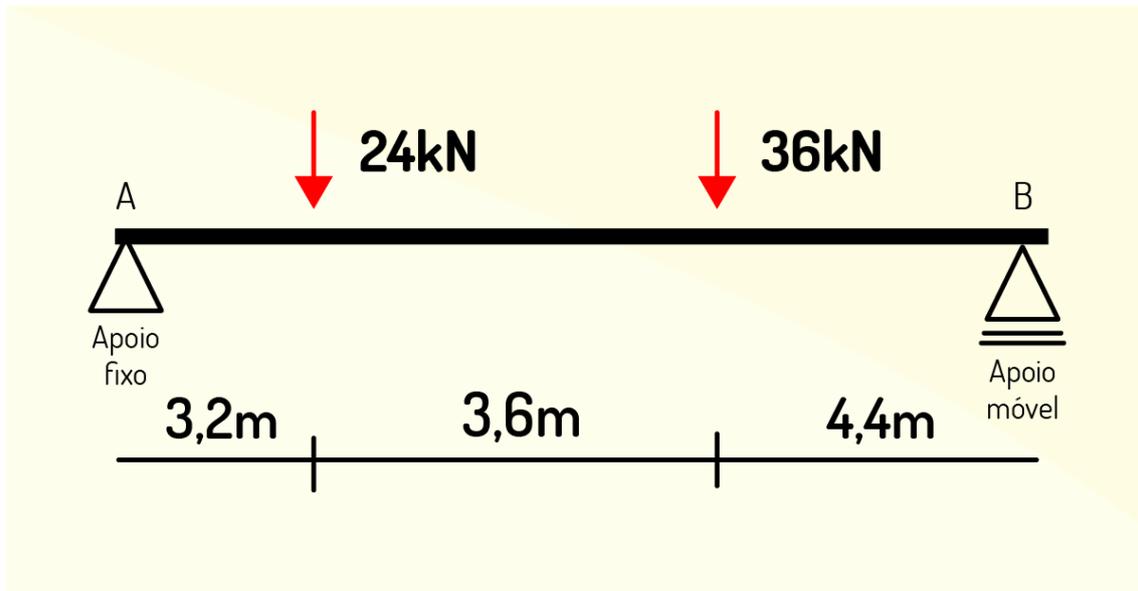


Figura 2.24 - Representação de uma viga com apoio fixo e móvel, como duas forças aplicadas
 Fonte: Elaborada pela autora.

Iniciaremos o exercício indicando as forças e identificando apoios de 1º e 2º gênero, os quais nos darão 2 reações (A_x e A_y) e 1 reação (B_y), respectivamente.

Teremos que encontrar a somatória das forças em x, em y e dos momentos, lembrando que todos são iguais a zero.

Desse momento, em y teremos:

$$\Sigma F_y = 0, \text{ logo, } A_y + B_y - 24 - 36 = 0$$

De modo que $A_y + B_y = 24 + 36$

Logo, $A_y + B_y = 60$

Em x, teremos que:

$$\Sigma F_x = 0, \text{ logo, } A_x = 0$$

E em termos do momento no ponto A, admitiremos o sentido horário para o giro, e momento como sendo o produto entre a força e o braço de alavanca, temos:

$$\Sigma M_A = 0, \text{ logo, } 24 \cdot 3,2 + 36 \cdot (3,2 + 3,6) - B_y \cdot (3,2 + 3,6 + 4,4) = 0$$

$$76,8 + 244,8 - B_y \cdot 11,2 = 0$$

$$\text{De modo que } B_y = 28,71 \text{ kN}$$

$$\text{Voltando à equação } A_y + B_y = 60$$

$$\text{Teremos que } A_y + 28,71 = 60 \text{ kN}$$

$$\text{Logo, } A_y = 31,29 \text{ kN}$$

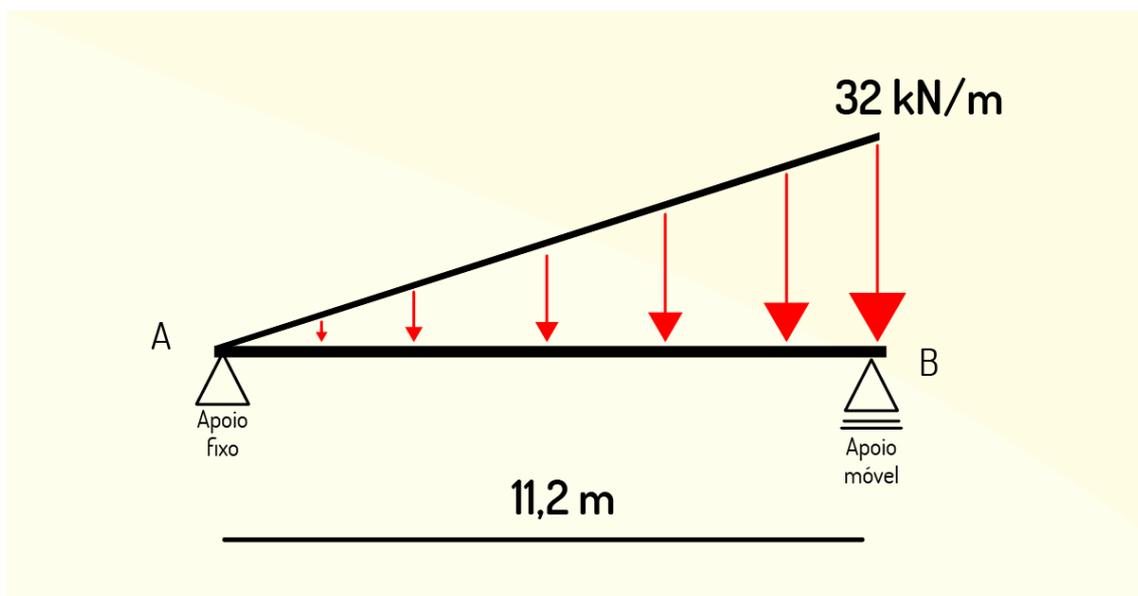


Figura 2.25 - Representação de uma viga com apoio fixo e móvel e com carga triangular

Fonte: Elaborada pela autora.

Observando aqui uma carga distribuída triangular com dois apoios, temos que, inicialmente, indicaremos as forças e identificaremos os apoios de 1º e 2º gêneros, os quais nos darão 2 reações (A_x e A_y) e 1 reação (B_y), respectivamente.

Em seguida, devemos decompor a carga triangular em uma força encontrando a área do triângulo evidente: $A = 179,2 \text{ kN}$, a qual será aplicada a $1/3$ do lado maior dela.

$$\text{De modo que } = \cdot L, \text{ então } = \cdot 11,2$$

$$\text{Logo } = 3,73 \text{ m}$$

Vemos que essa será a distância do apoio B na qual a carga estará mais concentrada, sendo assim, podemos tratar o problema como um de carga distribuída simples.

Refazendo os esquemas, teremos que:

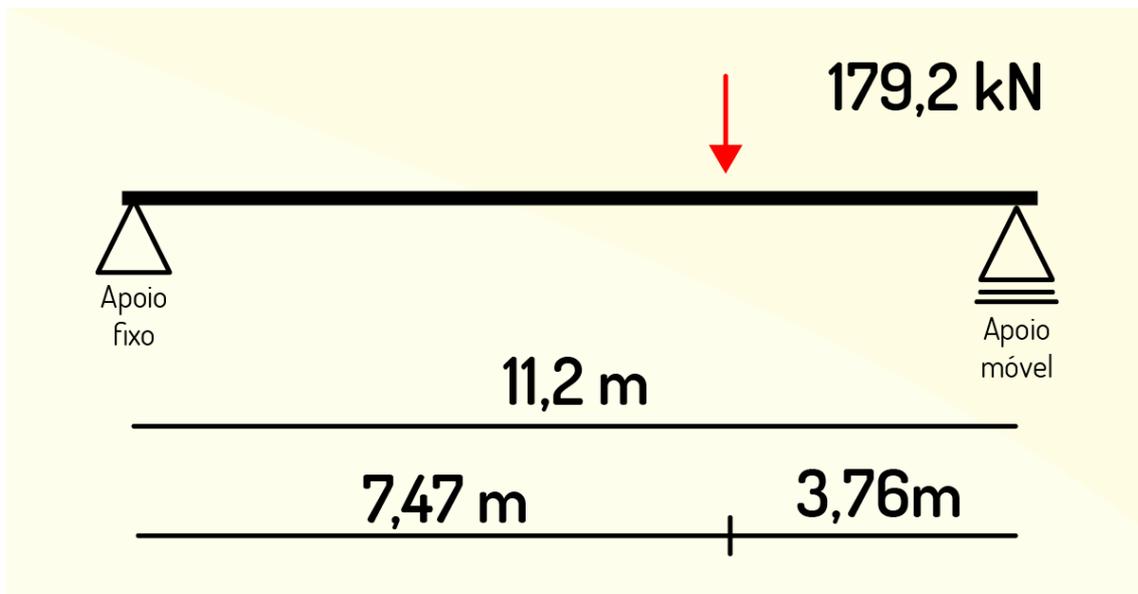


Figura 2.26 - Representação de uma viga após distribuição de carga triangular

Fonte: Elaborada pela autora.

Trataremos de 2 reações (A_x e A_y) e 1 reação (B_y), respectivamente.

Teremos que encontrar a somatória das forças em x, em y e dos momentos. Lembrando que todos são iguais a zero.

Desse momento, em y, teremos:

$$\Sigma F_y = 0, \text{ então, } A_y + B_y - 179,2 = 0$$

$$\text{Logo } A_y + B_y = 179,2 \text{ kN}$$

Em x, teremos que:

$$\Sigma F_x = 0, \text{ logo, } A_x = 0$$

E em termos do momento no ponto A, admitiremos o sentido horário para o giro, e momento como sendo o produto entre a força e o braço de alavanca, assim temos:

$\Sigma M_A = 0$, logo, $179,2 \cdot 7,47 - B_y \cdot 11,2 = 0$

$1.338,624 - B_y \cdot 11,2 = 0$

De modo que $B_y = 119,52 \text{ kN}$

Voltando à equação $A_y + B_y = 60$

Teremos que $A_y + 119,52 = 179,2 \text{ kN}$

Logo, $A_y = 59,68 \text{ kN}$

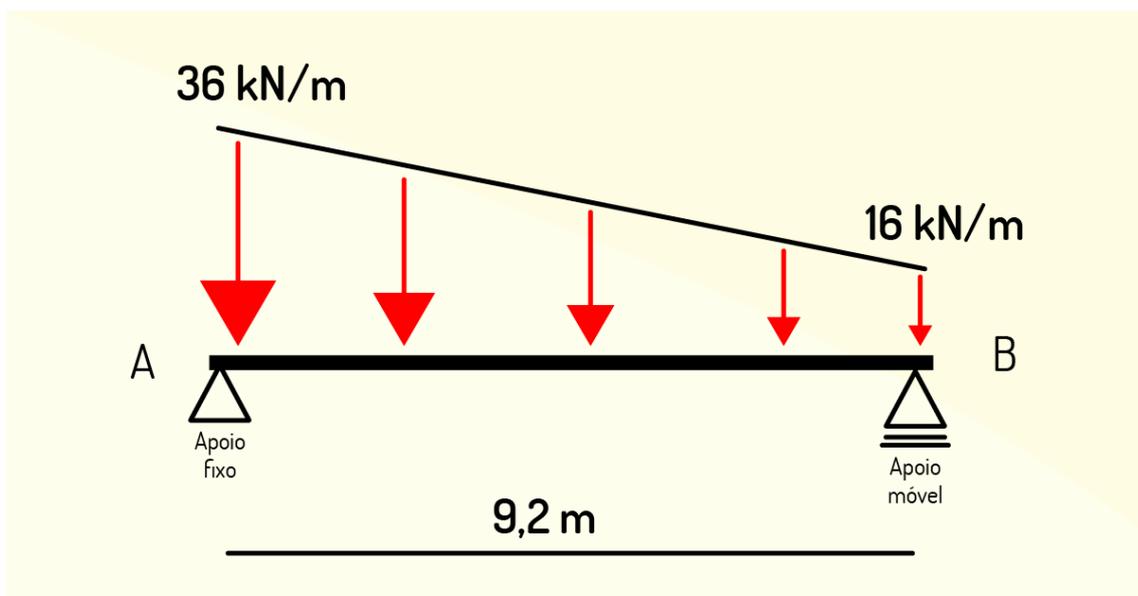


Figura 2.27 - Representação de uma viga com aplicação de duas forças, formando um trapézio

Fonte: Elaborada pela autora.

Iniciaremos o exercício dividindo o trapézio em um triângulo e um retângulo (traçar uma linha imaginária na horizontal do trapézio), em seguida, encontraremos as áreas das novas figuras geométricas.

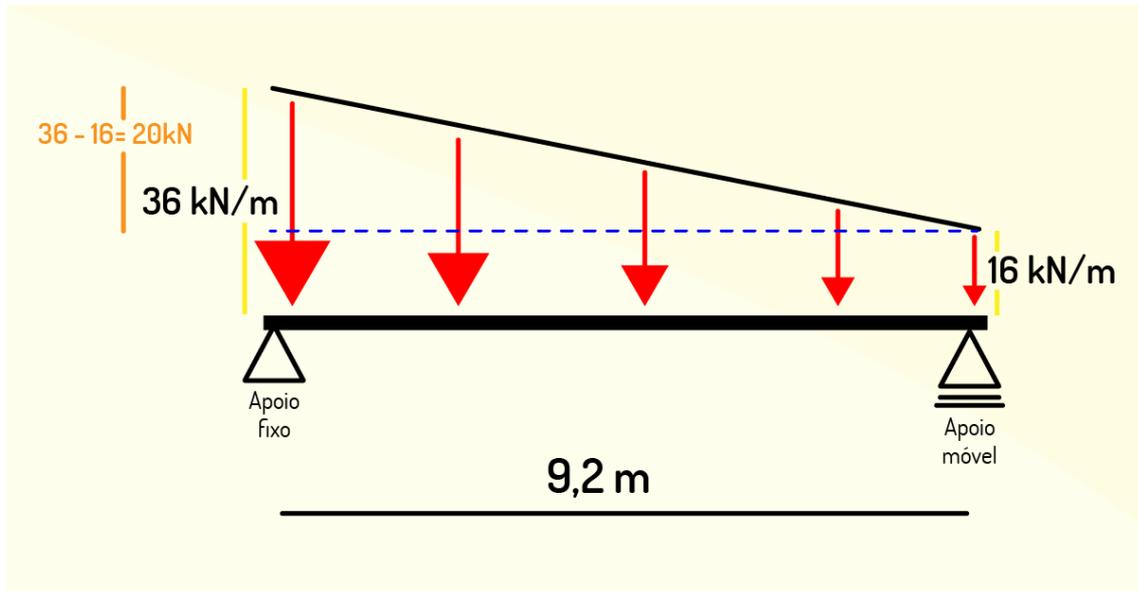


Figura 2.28 - Representação de uma viga dividida com aplicação de duas forças formando um trapézio

Fonte: Elaborada pela autora.

A área do retângulo é dada por $A = b \cdot h$, de modo que $A = 9,2 \cdot 16 = 147,2$ kN (valor da força concentrada no retângulo considerado).

A área do triângulo é $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = 92$ kN (valor da força concentrada no triângulo considerado).

Agora, encontraremos as posições nas quais aplicaremos essas forças.

No triângulo, teremos que $x = \frac{1}{3} \cdot L$, então $x = \frac{1}{3} \cdot 9,2$

Logo $x = 3,06$ m

No retângulo, teremos $x = \frac{1}{2} \cdot L$, então $x = \frac{1}{2} \cdot 9,2$

Logo $x = 4,6$ m

Refazendo os esquemas, teremos que:

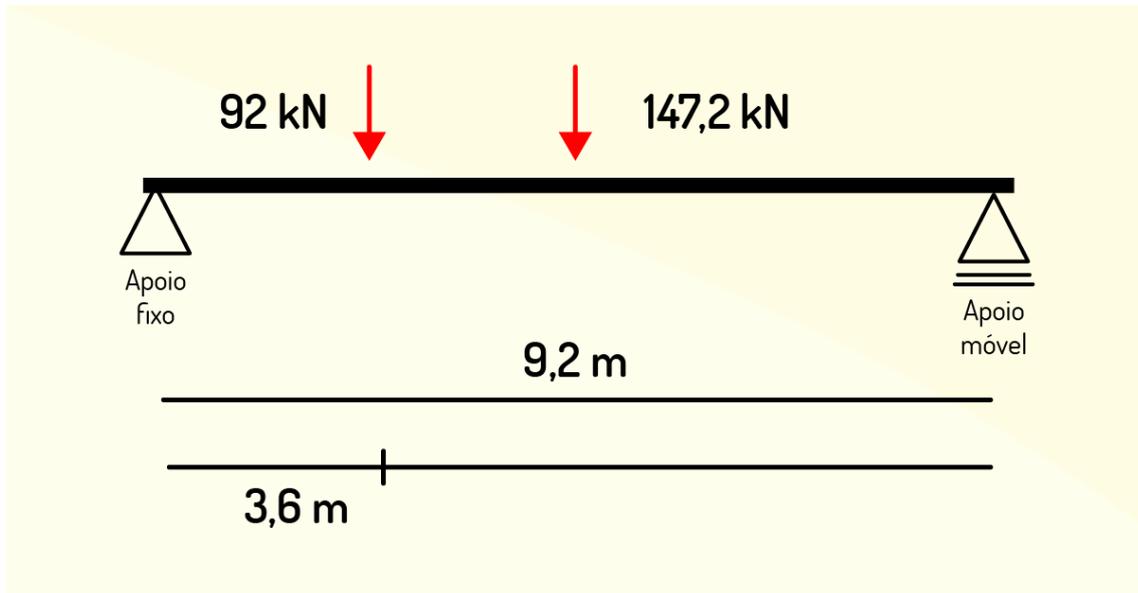


Figura 2.29 - Representação de uma viga após a distribuição de cargas em triângulo e retângulo
 Fonte: Elaborada pela autora.

Trataremos de 2 reações (A_x e A_y) e de 1 reação (B_y), respectivamente.

Teremos que encontrar a somatória das forças em x, em y e dos momentos, lembrando que todos são iguais a zero.

Desse momento, em y, teremos:

$$\Sigma F_y = 0, \text{ então, } A_y + B_y - 147,2 - 92 = 0$$

$$\text{Logo, } A_y + B_y = 239,2 \text{ kN}$$

Em x, teremos que:

$$\Sigma F_x = 0, \text{ logo, } A_x = 0$$

E em termos do momento no ponto A, admitiremos o sentido horário para o giro e momento como sendo o produto entre a força e o braço de alavanca, temos:

$$\Sigma M_A = 0, \text{ logo, } 92 \cdot 3,06 + 147,2 \cdot 4,6 - B_y \cdot 9,2 = 0$$

$$958,64 - B_y \cdot 9,2 = 0$$

$$\text{De modo que } B_y = 104,2 \text{ kN}$$

Voltando à equação $A_y + B_y = 239,2$

Sabe-se que $A_y + 104,2 = 239,2$ kN

Logo, $A_y = 135$ kN

ATIVIDADES

3) Considere uma viga com 13 m de comprimento, com um apoio móvel e um apoio fixo (em suas extremidades). Agora, assinale a alternativa correta sobre esforço cortante e momento fletor da viga para o caso dela estar submetida a uma carga distribuída de 1 tonelada de força por metro.

- a) A reação A_y será de 4,5 toneladas força e a reação B_y também será de 4,5 toneladas força.
- b) A força cortante V para $x = 13$ m terá valor de - 6,5 N.
- c) A somatória das forças em x será igual a 10N.
- d) O momento fletor para $x = 13$ m terá valor de 21 N.m.
- e) Como o momento é dado por $M = x \cdot X/2 - 6,5 \cdot x = 0$, teremos que sua representação será uma parábola côncava para baixo.

Cabos

Cabos são elementos estruturais extensos, delgados e flexíveis em toda sua extensão, ou seja, articulados; projetados para suportar cargas axiais. A principal diferença entre um cabo e um fio está na área de secção transversal (a região determinada pela intersecção do cilindro com um plano paralelo às bases), de modo que os cabos a apresentam maior e por isso são capazes de suportar maiores cargas.

Existem duas categorias para os cabos, as quais estão de acordo com o seu carregamento:

- cabos que sustentam cargas concentradas;
- cabos que sustentam cargas distribuídas:
 - catenários: tipo de cabos os quais se encontram submetidos ao seu próprio peso de modo que sua configuração de equilíbrio é chamada de catenária. Como exemplo, podemos citar os cabos de transmissão, como as linhas de transmissão.
 - parabólicos: tipo de cabos que apresentam configuração de equilíbrio parabólico (de 2º grau). Como exemplo, podemos citar as pontes suspensas.

Forças em Cabos

Ao analisarmos como as cargas se comportam nos cabos, percebemos que, no caso de estarem distribuídas, as linhas de pequena flecha integradas à suspensão parabólica se comportam como se as cargas se distribuíssem uniformemente ao longo do vão, o que na realidade não acontece, visto que são distribuídas ao longo do fio. No caso dos cabos utilizados em pontes suspensas, julgamos que estão carregados, pois seu peso é muito pequeno comparado com o peso do tabuleiro. Sendo assim, para melhor entendermos essa dinâmica das cargas, faz-se necessário o estudo das forças nesses cabos.

Forças em Cabos Sujeitos às Cargas Concentradas

Analisando a Figura 2.30, percebemos que se trata de um cabo flexível, cuja resistência à flexão pode ser desprezada, preso a dois pontos fixos A e B, e sujeito a três cargas concentradas verticais Q1, Q2 e Q3. O peso do cabo é desprezível diante das cargas que suporta. De modo que as forças internas em qualquer ponto do cabo são reduzidas a uma força de tração cuja direção é tangencial ao cabo nesse ponto.

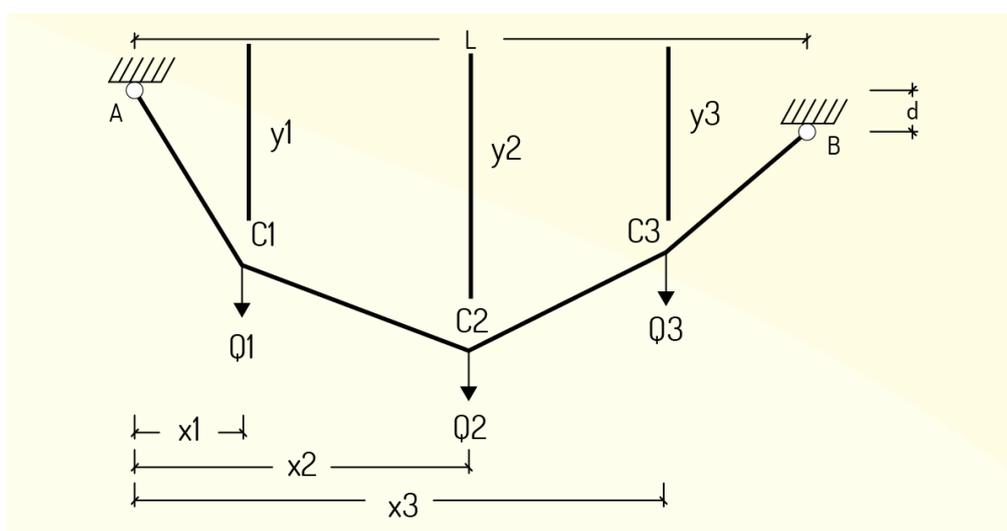


Figura 2.30 - Representação de um cabo flexível sujeito às cargas concentradas

Fonte: Elaborada pela autora.

Acima temos que L é o comprimento do vão, d é o desnivelamento vertical entre os apoios; x1, x2 e x3 são as distâncias existentes entre as forças e os apoios; e x e y posições de um qualquer ponto P, a partir dos quais é possível calcular outras grandezas, como VA, HA, VB e HB, as quais são as reações de apoio; y1, y2 e y3, os quais são configurações do cabo e até mesmo o comprimento total do cabo.

FIQUE POR DENTRO

Um bom material de apoio para melhor entendimento deste conteúdo é a dissertação de mestrado “Análise de tensões e deformações em fios de cabos condutores de linhas de transmissão”, de Eduardo Luis Souza de Athayde Nunes Filho, disponível em: http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/21494/1/2016_EduardoLuisSouzadeAthaydeNunesFilho.pdf. Acesso em: 08 jan. 2020.

Na Figura 2.31, podemos observar o diagrama de corpo livre no qual são evidenciadas as forças para todo cabo.

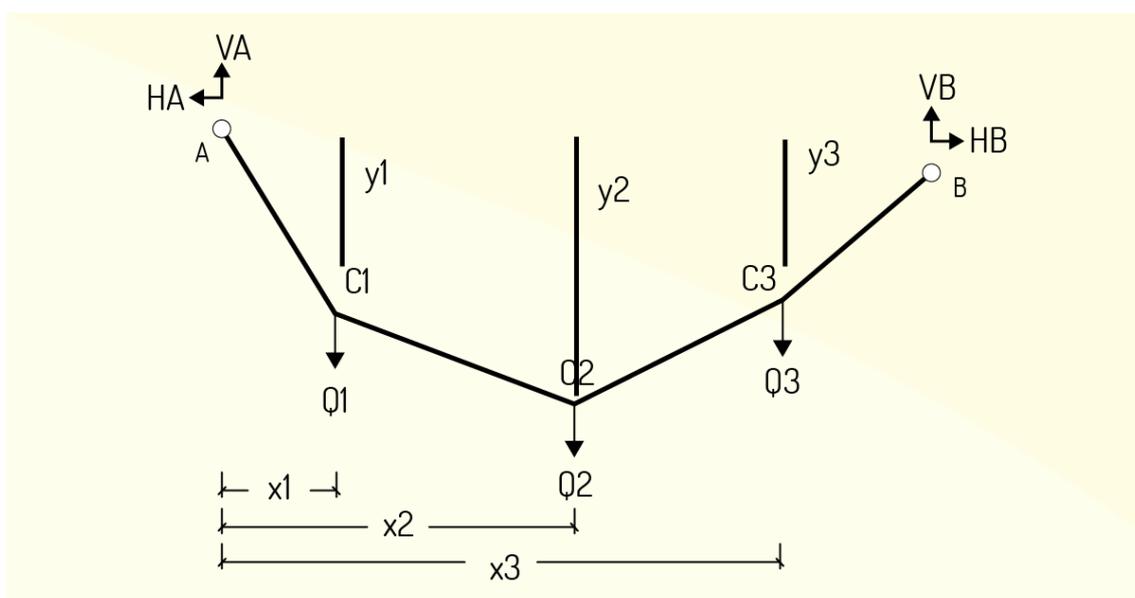


Figura 2.31 - Representação do diagrama de forças para um cabo

Fonte: Elaborada pela autora.

A partir do diagrama de corpo livre de todo o cabo, podemos inferir que:

$$\sum M_A = 0 \text{ ou } \sum M_B = 0,$$

$$\sum F_x = 0 \text{ e } \sum F_y = 0$$

Na Figura 2.32, podemos observar o diagrama de corpo livre no qual ficam evidenciadas as forças para o trecho de A até o ponto P.

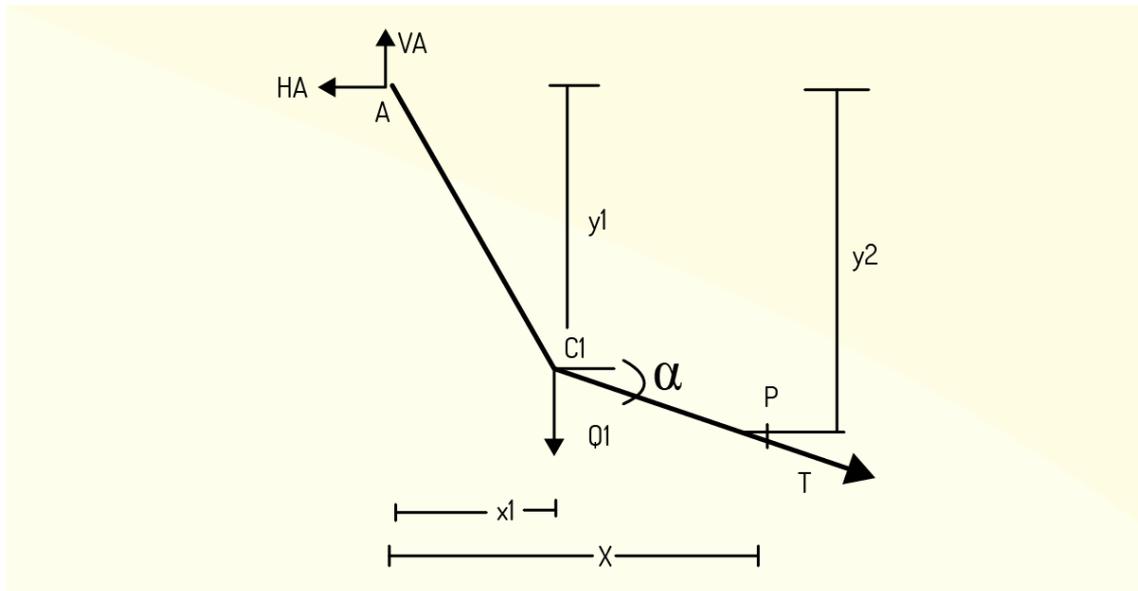


Figura 2.32 - Representação do diagrama de forças para o trecho cabo de A ao ponto P.

Fonte: Elaborada pela autora.

A partir do diagrama de corpo livre do trecho AP, podemos concluir que $\sum M_P = 0$.

A partir das conclusões explanadas nas Figuras 2.31 e 2.32, podemos calcular as reações de apoio para o cabo em questão, de modo que, para calcularmos cada uma das ordenadas y_1 , y_2 e y_3 dos pontos C1, C2 e C3, precisamos considerar:

- diagrama de corpo livre do trecho AC1 ou BC1 e estabelecer-se a equação $\sum M_{C1} = 0$, tendendo a y_1 ;
- diagrama de corpo livre do trecho AC2 ou BC2 e estabelecer-se a equação $\sum M_{C2} = 0$, tendendo a y_2 ;
- diagrama de corpo livre do trecho AC3 ou BC3 e estabelecer-se a equação $\sum M_{C3} = 0$, tendendo a y_3 .

No diagrama de corpo livre de um trecho qualquer do cabo, teremos que a equação $\sum F_x = 0$ conduzirá à $T \cos \alpha = HA = HB$, ou seja, a componente horizontal da força de tração terá o mesmo valor em qualquer ponto do cabo. Desse modo, podemos concluir que a força de tração T será máxima e $\cos \alpha$ será mínimo, portanto, o trecho de maior inclinação será aquele adjacente a um dos dois apoios.

Forças em Cabos Sujeitos às Cargas Distribuídas (Parabólicos e em Catenários)

Um cabo flexível preso às duas extremidades (A e B), ao estar sujeito a uma carga distribuída, apresenta uma configuração curvilínea e força interna em dado ponto igual à força de tração, cuja direção é tangencial à curva.

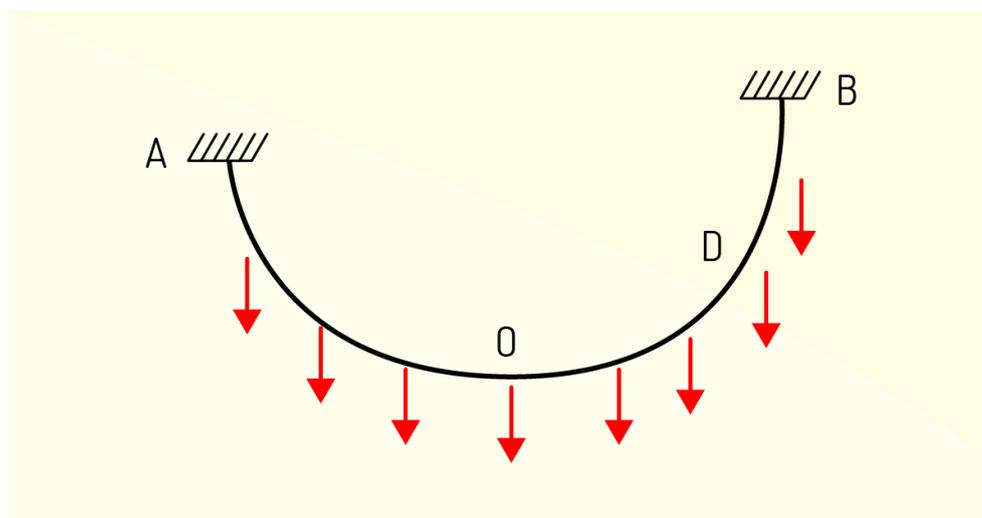


Figura 2.33 - Representação do diagrama de forças para o trecho cabo de A a B

Fonte: Elaborada pela autora.

Ao analisarmos o intervalo do ponto mais baixo do cabo ao ponto D por meio do diagrama de corpo livre, percebemos que há forças de tração T para horizontal (T_0) e tangencial à curva D (T), além da presença da força resultante P devido à carga distribuída suportada pelo trecho OD.

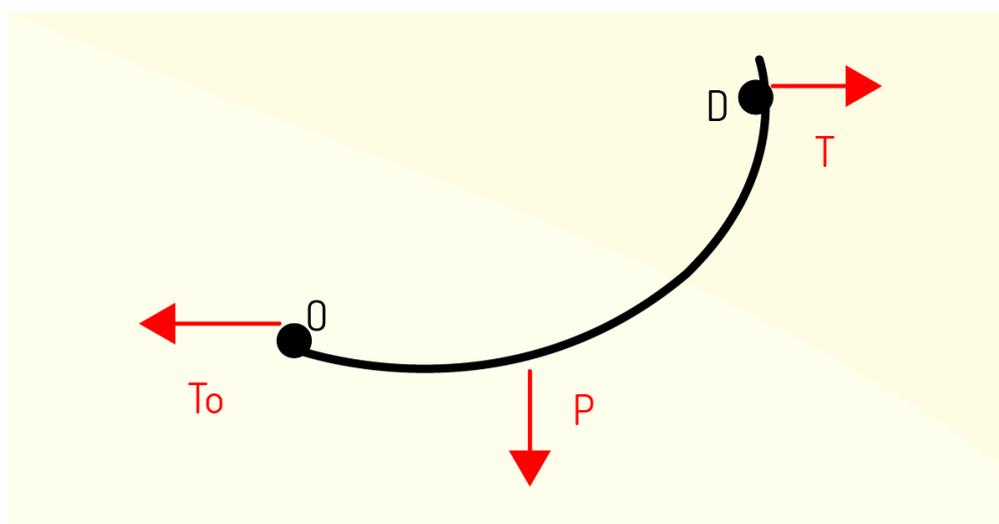


Figura 2.34 - Representação do diagrama de forças para o trecho O a D

Fonte: Elaborada pela autora.

Sabendo que o sistema está em equilíbrio e encontrando por meio do Teorema de Pitágoras a relação poligonal para os vetores, chegamos às seguintes relações:

$$T \cos \theta = T_0$$

$$T \sin \theta = P$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + P^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{P}{T_0}$$

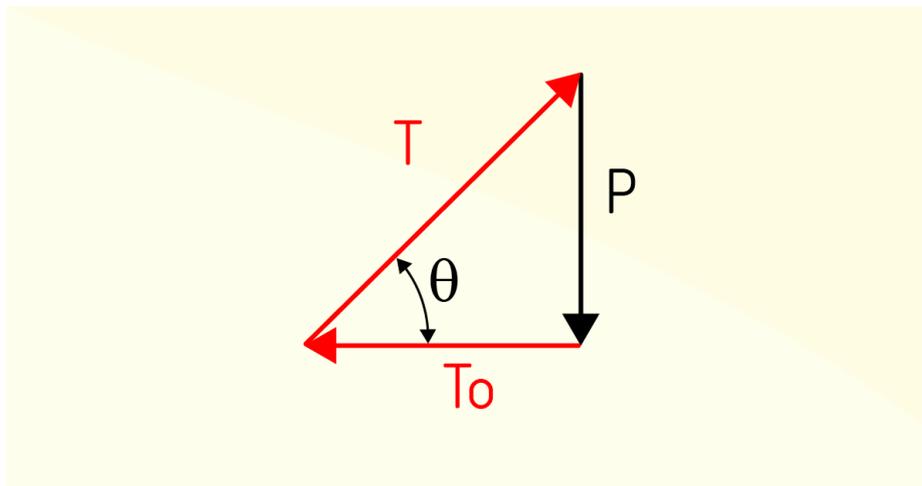


Figura 2.35 - Representação do polígono de forças fechado de um sistema em equilíbrio

Fonte: Elaborada pela autora.

A partir do que foi visto até então, podemos concluir que o componente horizontal da força de tração será o mesmo em qualquer ponto do cabo; a tração mínima está exatamente no ponto mais baixo do cabo no qual $\theta = 0$ tende a $\cos \theta = 1$, e a força de tração máxima encontra-se em um dos pontos fixos do cabo.

FIQUE POR DENTRO

Calcular as grandezas de tração mínima e máxima em um cabo e seu comprimento não são tarefas fáceis. Confira as dicas de conteúdo e exercícios resolvidos dos slides sobre cabos flexíveis dos professores Leonardo Goliatt e Alexandre Curry, para a disciplina de Resistência dos Materiais, disponível em: <http://www.ufjf.br/mac015/files/2015/02/cabos-2.pdf>. Acesso em: 08 jan. 2020.

Supondo uma nova situação ilustrada na Figura 2.36, percebemos que o cabo AB suporta uma carga uniformemente distribuída chamada de p , ao longo da direção horizontal.

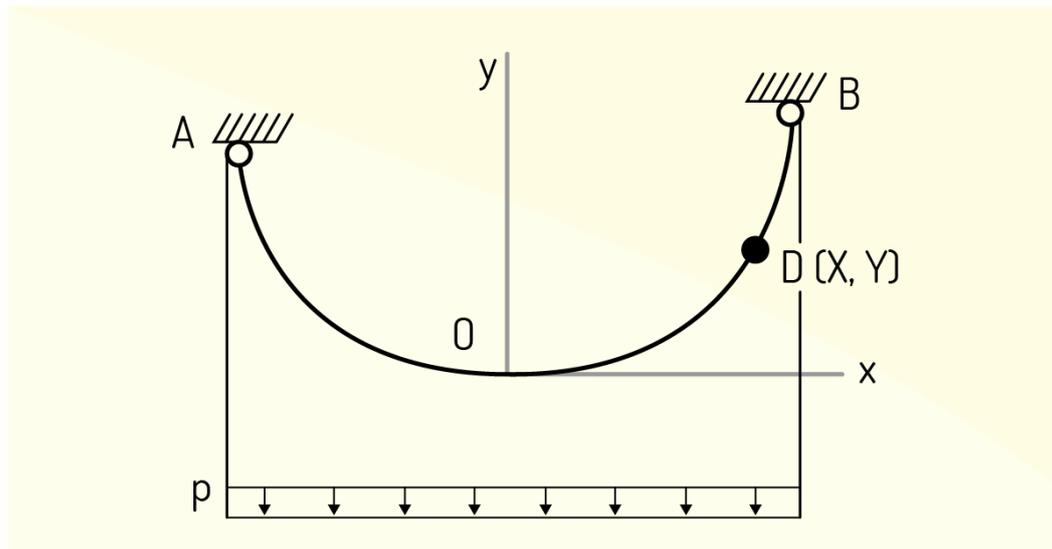


Figura 2.36 - Representação de cabo suportando uma carga distribuída

Fonte: Elaborada pela autora.

De modo que seu diagrama de corpo livre é ilustrado na Figura 2.37, do intervalo entre o ponto mais baixo O e um outro ponto qualquer chamado de D.

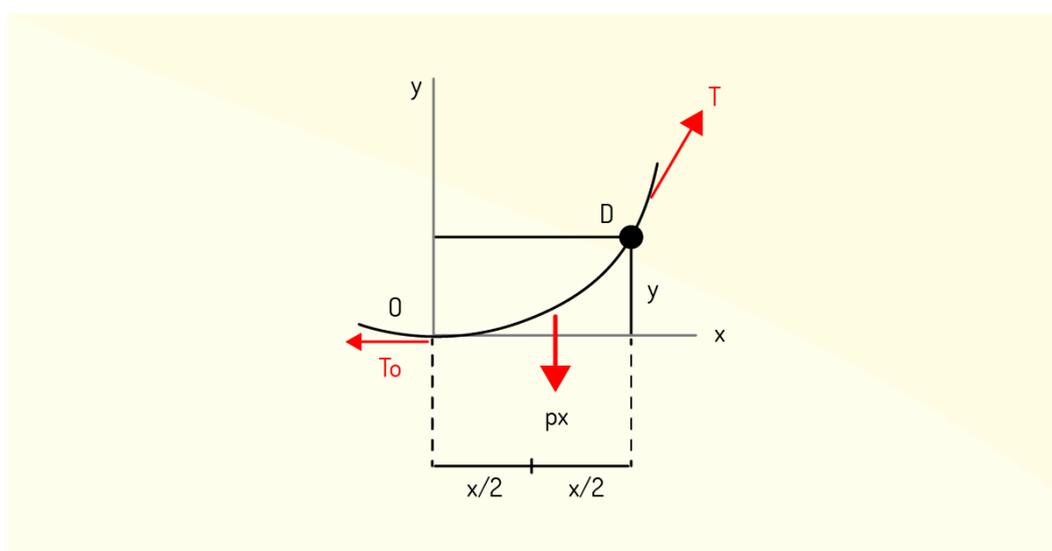


Figura 2.37 - Representação do diagrama de corpo livre de um cabo suportando uma carga distribuída

Fonte: Elaborada pela autora.

Lembrando que $\sum M_D = 0$, então, teremos $p x \frac{x}{2} - T_0 y = 0$, de modo que $y = p \frac{x^2}{2} T_0$, a qual descreve uma parábola com eixo vertical e vértice na origem das coordenadas.

A partir da análise da Figura 2.38, podemos concluir que o vão é dado pela distância horizontal L entre os apoios do cabo, e a flecha é dada pela projeção vertical da distância adotada h desde os apoios ao ponto mais baixo do cabo. De modo que podemos calcular o comprimento do cabo desde o seu ponto mais baixo O até o apoio B por meio da série: $S_B = X_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{Y_B}{X_B} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{Y_B}{X_B} \right)^4 + \dots \right]$, de maneira que, para valores de y_B/x_B menores do que 0,5, seja necessário calcular apenas os dois primeiros termos da série.

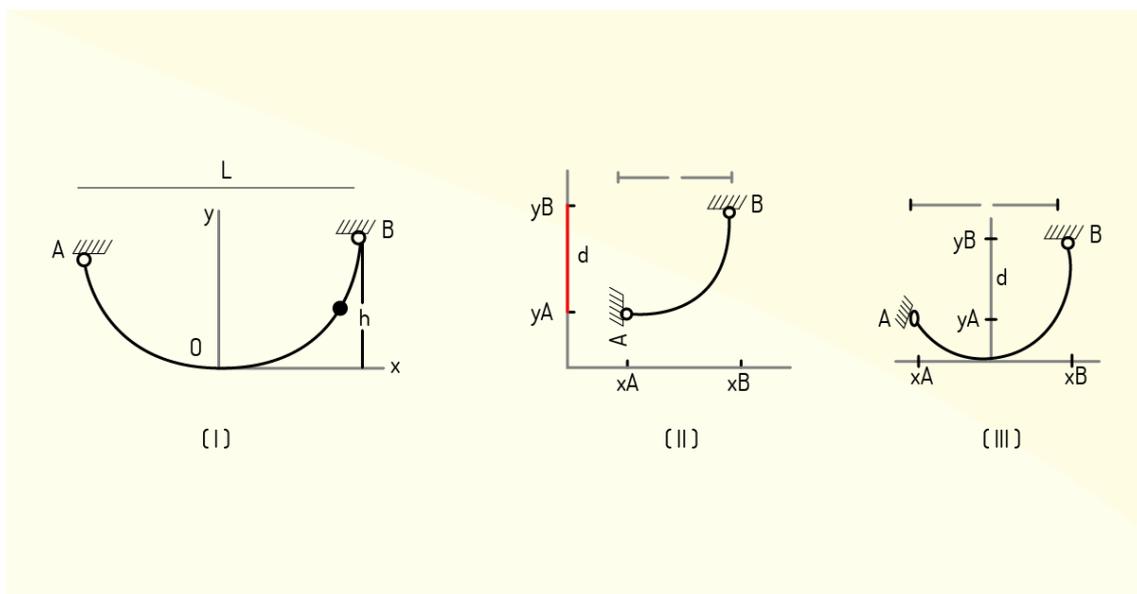


Figura 2.38 - Representação de vão e flecha em um cabo

Fonte: Elaborada pela autora.

Resumindo:

- quando um cabo estiver sujeito a um carregamento distribuído variável $w(x)$, podemos determinar o valor da tração T ao longo desse cabo por meio de

$$T = \frac{T_0}{\cos \theta}, \text{ de modo que, para o ângulo igual a zero, teremos que } T = T_0.$$

- ainda em termos gerais para tração em cabos $y'' = \frac{w(x)}{T_0}$, em que w é a carga por comprimento linear.

- percebemos que, para uma distribuição constante de carga, teremos um cabo parabólico, de modo que o valor da tração será dado por $T_0 = \frac{wl_A^2}{2h_A}$ ou $\frac{wl_B^2}{2h_B}$ ou, de maneira geral, por $y(x) = \frac{w}{2T_0}x^2$.
- quando não houver carregamento externo (w) atuante, teremos o caso de cabos em catenária, nos quais existe apenas a massa linear μ do cabo, desse modo, $w(x) = \mu(ds/dx)$.
- ainda em termos dos cabos em catenária, teremos que a tração poderá ser calculada a partir de $T(y) = T_0 + \mu \cdot y$, ou de modo geral a partir de $y(x) = \frac{T_0}{\mu} \left[\cosh \left(\frac{\mu}{T_0} x \right) - 1 \right]$.
- o comprimento de um cabo em catenária pode ser calculado a partir de $S = \frac{T_0}{\mu} \sinh \left(\frac{\mu}{T_0} x \right)$.

REFLITA

“Você nunca será a pessoa que você pode ser se a pressão, tensão e disciplina forem tiradas da sua vida” – James Bilkey.

FIQUEPORDDENTRO

Para saber mais sobre a análise estrutural I e conhecer os parâmetros que influenciam a concepção de sistemas estruturais, os esforços internos em estruturas isostáticas (treliças, vigas, pórticos, dentre outros) e o estudo de cargas móveis em estruturas isostáticas; além de exercícios resolvidos, acesse o material a seguir, do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, dos autores Ângela do Valle, Henriette Lebre La Rovere e Nora Maria De Patta Pillar. Disponível em: <http://pet.ecv.ufsc.br/arquivos/apoio-didatico/ECV5219%20-%20An%C3%A1lise%20Estrutural%20I.pdf>. Acesso em: 08 jan. 2020.

ATIVIDADES

4) Considere que um cabo de luz pode suportar uma massa de 10 kg por metro linear, e que este se encontra suspenso nos pontos A e B, no mesmo nível, separados a 200 m de distância, e que a flecha no meio do vão é 30m. Agora, assinale a alternativa correta a respeito desse cabo.

- a) A carga por comprimento linear será de 110 N/m.
- b) A tração máxima no cabo terá valor de 28 kN.
- c) A tração máxima ocorrerá somente no cabo de sustentação A.
- d) O comprimento do cabo será de 215 m.
- e) A tração mínima desse cabo será igual a 16,33 kN.

INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: Resistência dos materiais

Editora: Pearson

Autor: Russel C. Hibbeler

ISBN: 9788587918673

Comentário: Livro bastante completo e importante referência no estudo de resistência dos materiais, aborda os temas estudados nesta unidade e muito outros, extremamente relevantes para sua formação, trazendo conteúdo de ótima qualidade, ilustrações de fácil entendimento e exercícios que instigam o aprendizado.

INDICAÇÕES DE FILME

Nome do filme: A Travessia

Gênero: biografia, drama, aventura

Ano: 2015

Comentário: O filme trata da vida do equilibrista Philippe Petit e suas aventuras para esticar um cabo de aço nos mais variados lugares, como a capela de Notre Dame e as torres gêmeas do World Trade Center. Nele, podemos verificar a força de tração em um cabo de aço, o uso de algumas estruturas em construções, além de enriquecer nosso conhecimento cultural.

UNIDADE III

Forças Distribuídas

Julio Cesar Agreira Pastoril

Introdução

Caro(a) aluno(a), nesta unidade, iremos nos deparar com sistemas contendo uma distribuição de carga ao longo de um comprimento, área ou volume. No tópico I, serão propostos conceitos sobre centroide ou baricentro, determinação do centro de gravidade de uma figura plana, por exemplo, além dos casos que envolvam um conjunto de massas. No tópico II, serão introduzidos conceitos da utilização de integrais para determinar o centro de gravidade de determinadas figuras planas e espaciais. Já no tópico III, serão desenvolvidos mecanismos para determinar o momento de inércias para essas figuras. Aqui, será introduzido o teorema dos eixos paralelos, além de proposto um exemplo sobre sistemas que envolvam mudanças de coordenadas para coordenadas polares. No último tópico, chegaremos aos casos que envolvam momento de inércia de corpos volumétricos.



Fonte: Burmakin Andrey / 123RF

Centroides e Baricentros

Centroides têm como definição o centro geométrico de uma figura. O centro geométrico coincide com o centro de massa de um corpo quando a forma geométrica for homogênea. **Baricentro**, por sua vez, pode ser entendido como o ponto em que há um equilíbrio de forças sobre ele.

Centroide, Centro de Gravidade ou Centro de Massa

Durante uma aula de física, um aluno começa a brincar com seu livro tentando equilibrar apenas com um dedo. Depois de muitas tentativas, ele consegue. Ao encontrar o ponto de equilíbrio, ou seja, o ponto onde o peso resultante do corpo está localizado, o aluno conseguiu equilibrar o livro em seu dedo na vertical, como visto na Figura 3.1. A esse ponto, damos o nome de centro de gravidade, centro de massa ou centroide.

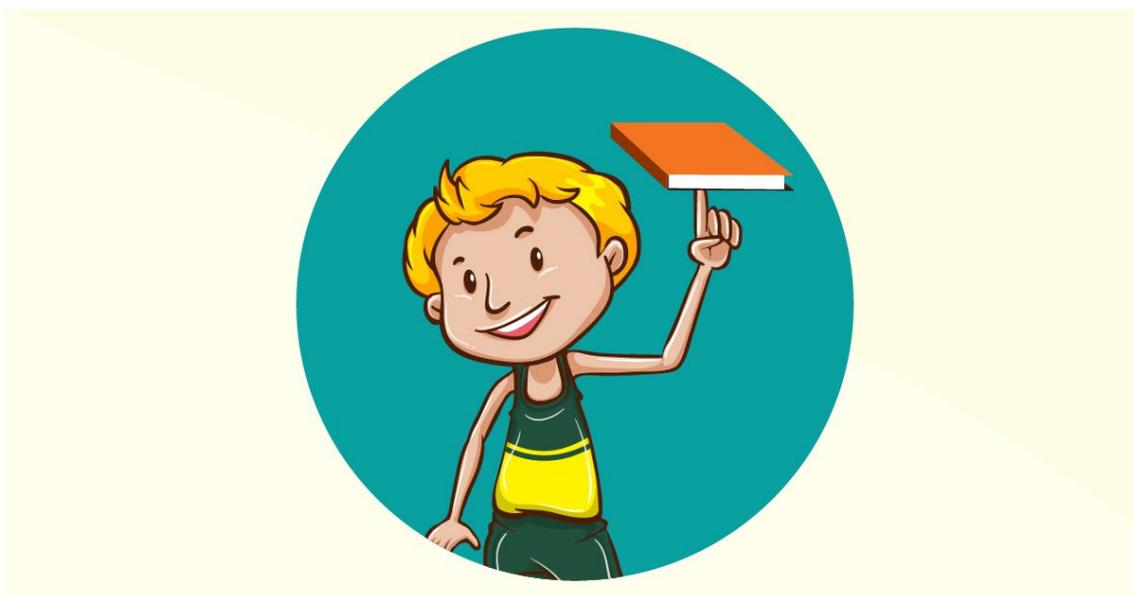


Figura 3.1 - Ilustração do livro equilibrado na ponta do dedo de uma das mãos na vertical

Fonte: Elaborada pelo autor.

Sobre centro de gravidade, alguns autores propuseram definições importantes. Para Lehmkuhl e Smith (1989), centro de gravidade é o único ponto de um corpo onde as partículas ao redor estão igualmente distribuídas. Já para Watkin (2001), centro de gravidade é um ponto por meio do qual a linha de ação do peso de um objeto atua, independentemente da posição dele. Por fim, Okuno e Fratin (2003, p. 93) propõem que centro de gravidade seja o local em um corpo onde é aplicada a resultante das forças-peso, como se toda a massa do corpo estivesse concentrada nesse ponto.

Determinação do Centro de Gravidade

Depois das definições propostas, centro de gravidade (CG) é o ponto onde pode ser considerada a ação das forças de atração gravitacional, a força peso, como podemos ver na Figura 3.2.

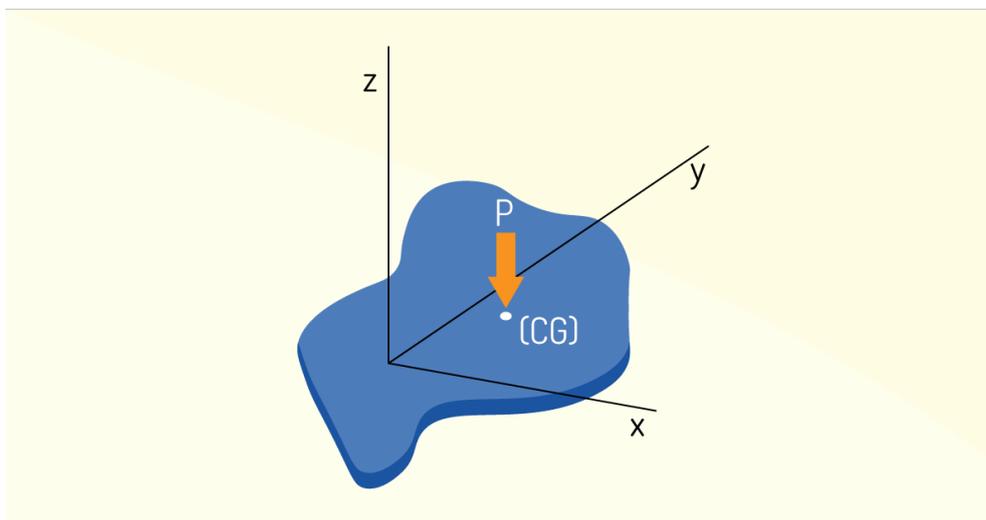


Figura 3.2 - Chapa homogênea

Fonte: Elaborada pelo autor.

A determinação do centro de gravidade para um sistema de uma ou duas dimensões pode ser feita, como podemos ver a seguir.

- **Sistemas de várias partículas**

Um sistema contendo três partículas, como mostra a Figura 3.3, está em equilíbrio.

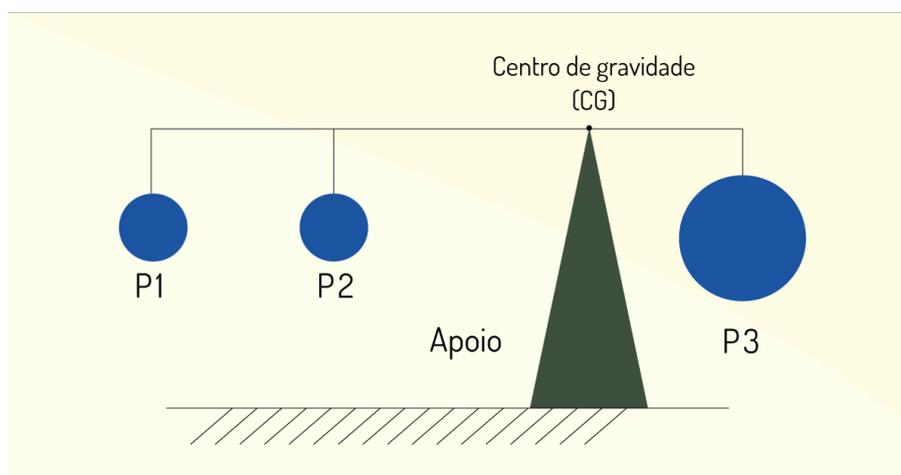


Figura 3.3 - Sistema contendo três massas em equilíbrio

Fonte: Elaborada pelo autor.

Quanto maior o peso da partícula, como no caso da partícula 3, maior será a influência desta na determinação do centro de gravidade do sistema. Na Figura 3.4, temos uma ilustração das partículas e suas respectivas distâncias até o centro de gravidade. Como é possível notar, a posição de equilíbrio, ou seja, o centro de gravidade, estará mais próxima da partícula de maior massa, como era de se esperar.

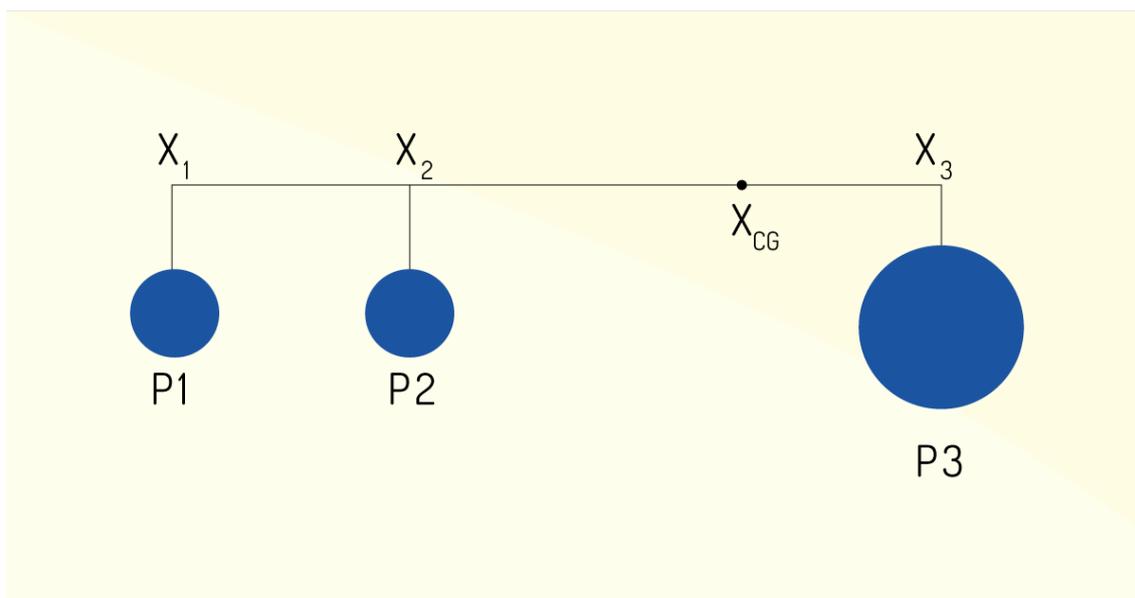


Figura 3.4 - Centro de gravidade de um sistema contendo três massas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Matematicamente, a coordenada do centro de gravidade pode ser determinada por uma média ponderada em função dos pesos de cada uma das partículas, como a seguir:

$$X_{CG} = \frac{P_1 \cdot X_1 + P_2 \cdot X_2 + P_3 \cdot X_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

- **Corpos homogêneos e geometria irregular**

Um sistema composto por uma figura geométrica não regular pode ser dividido em pequenas figuras regulares, como na Figura 3.5.

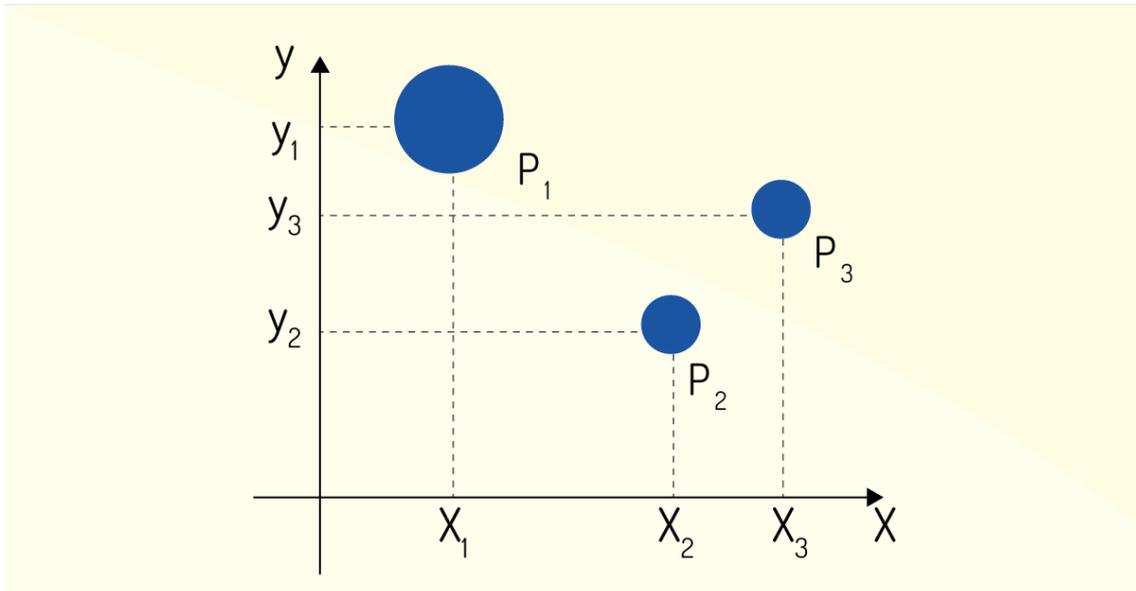


Figura 3.5 - Sistema contendo três massas em um sistema de coordenada

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após a divisão, a determinação do centro de gravidade pode ser encontrada ao considerar um novo sistema de várias partículas.

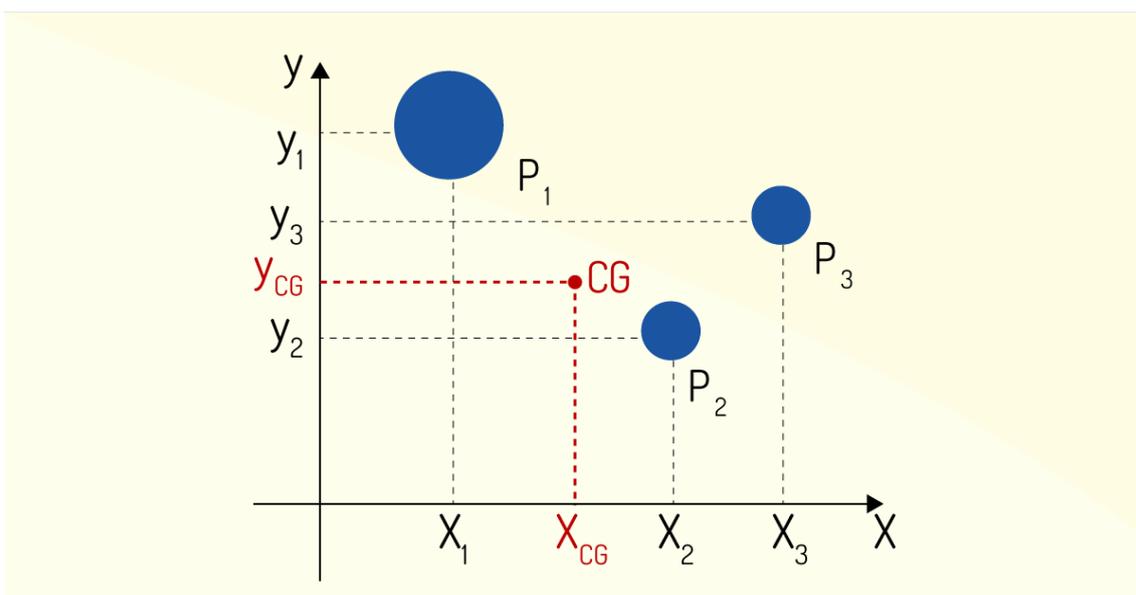


Figura 3.6 - Centro de gravidade de um conjunto de massas em um sistema de coordenadas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Matematicamente, o centro de gravidade do sistema apresenta coordenadas em x e y, e pode ser encontrado, como podemos ver a seguir:

$$X_{CG} = \frac{P_1 \cdot X_1 + P_2 \cdot X_2 + P_3 \cdot X_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

$$Y_{CG} = \frac{P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

- **Centro de gravidade de figuras planas - baricentro**

Corpo homogêneo: possuir a mesma natureza ou a mesma substância em qualquer parte do corpo.

Corpo isotrópico: possuir as mesmas propriedades físicas em qualquer parte do corpo.

A determinação do centro de gravidade de figuras planas, como na Figura 3.7, pode ser feita da seguinte forma: o primeiro passo para se determinar o centroide e o baricentro de uma figura é projetá-la em um plano cartesiano e orientá-la a partir do plano.

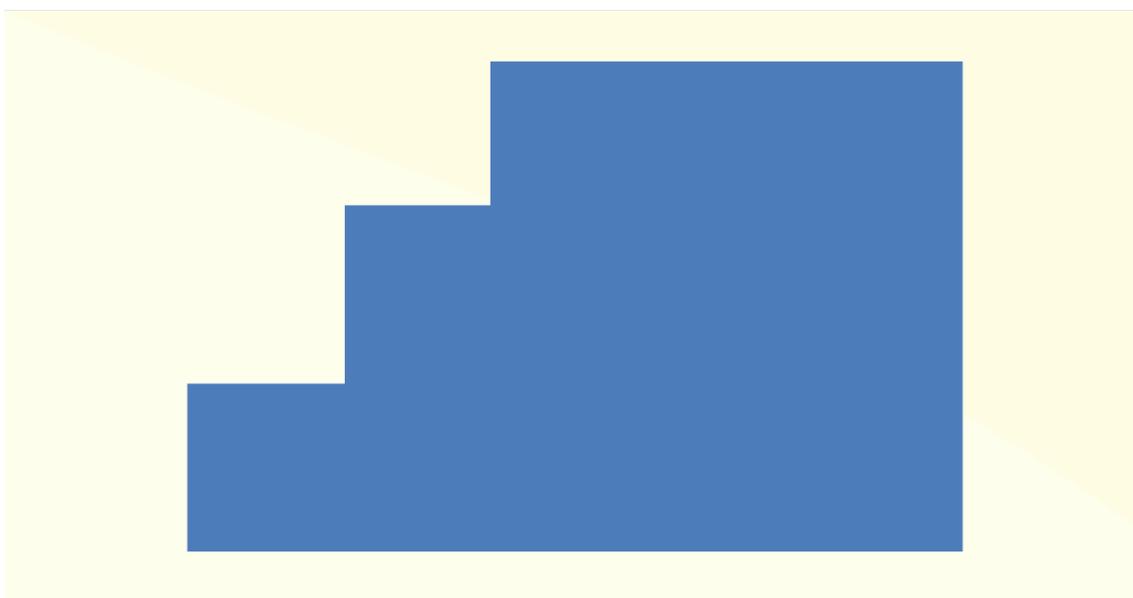


Figura 3.7 - Figura geométrica

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao orientar a figura no plano cartesiano, é possível dividir a figura geométrica em pequenas figuras regulares de áreas conhecidas. Depois de dividi-las em pequenas áreas, é possível determinar o centro de gravidade de cada figura individualmente, como visto na Figura 3.8.

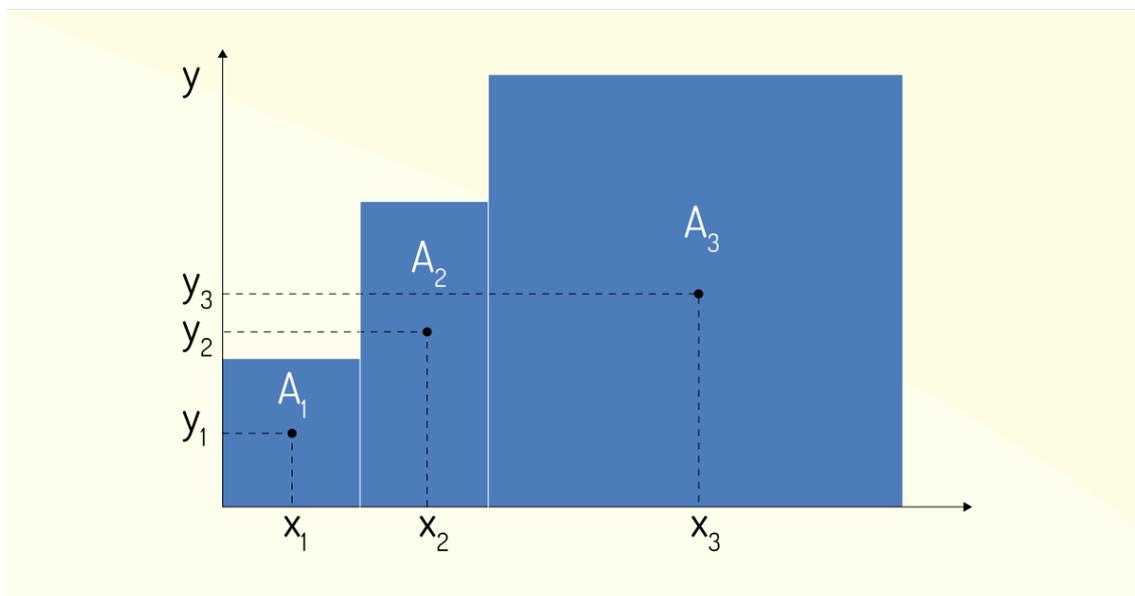


Figura 3.8 - Figura geométrica composta por outras figuras de áreas conhecidas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Matematicamente a expressão que nos dá o centro de gravidade de uma figura geométrica anterior é a seguinte:

$$x_{CG} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_{CG} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

O centro de gravidade é destacado na Figura 3.9, em que x_{CG} é a localização em x do centro de gravidade, e y_{CG} é a localização em y dele.

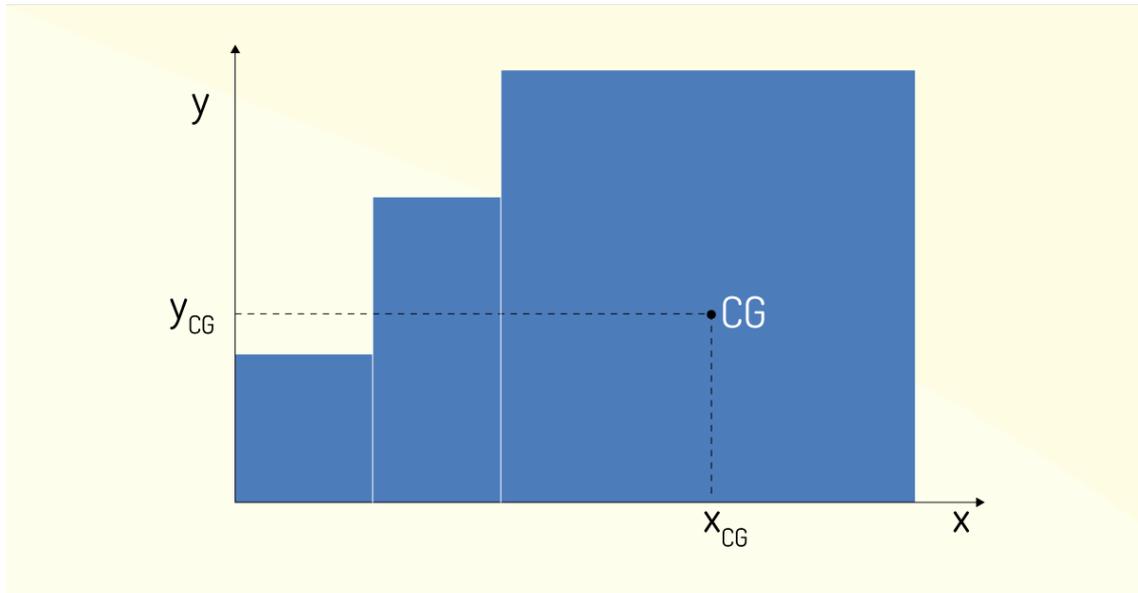


Figura 3.9 - Figura geométrica em um sistema de coordenadas

Fonte: Elaborada pelo autor.

A coordenada do centro de gravidade é dada por (x_{CG}, y_{CG}) . Uma observação importante que vale a pena ressaltar é que o centro de gravidade nem sempre coincide com o centro de massa.

Além das figuras regulares, temos aquelas figuras irregulares e as circulares e os centroides, bem como os momentos de inércia em relação aos eixos x e y, respectivamente, são evidenciados na Figura 3.10.

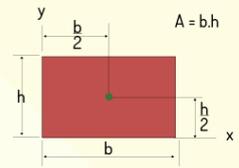
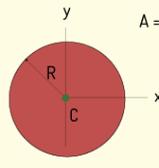
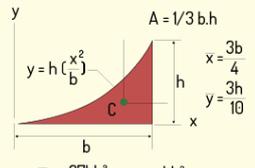
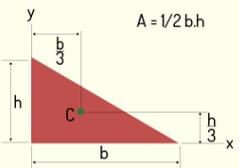
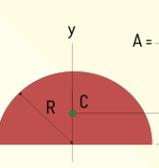
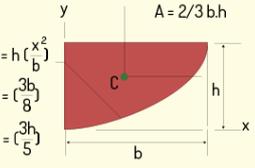
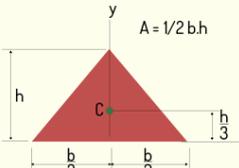
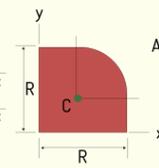
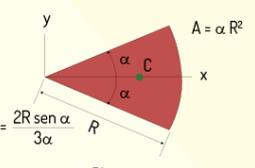
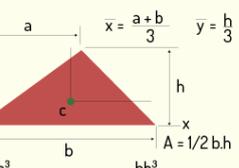
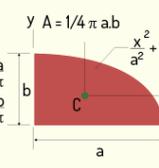
Área momento de inercia		
<p>Retângulo</p>  <p>$A = b \cdot h$</p> <p>$\bar{x} = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{y} = \frac{b^3h}{12}$ $\bar{I}_{xy} = 0$</p> <p>$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $I_y = \frac{b^3h}{3}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$</p>	<p>Círculo</p>  <p>$A = \pi R^2$</p> <p>$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$ $I_{xy} = 0$</p>	<p>Média parabólica complementar</p>  <p>$A = 1/3 b \cdot h$</p> <p>$\bar{x} = \frac{3b}{4}$ $\bar{y} = \frac{3h}{10}$</p> <p>$\bar{I}_x = \frac{37bh^3}{2100}$ $I_x = \frac{bh^3}{21}$</p> <p>$\bar{I}_y = \frac{b^3h}{80}$ $I_y = \frac{b^3h}{5}$</p> <p>$\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{120}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$</p>
<p>Triângulo Retângulo</p>  <p>$A = 1/2 b \cdot h$</p> <p>$\bar{x} = \frac{bh^3}{36}$ $\bar{y} = \frac{b^3h}{36}$ $\bar{I}_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$</p> <p>$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3h}{12}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$</p>	<p>Semicírculo</p>  <p>$A = \pi R^2$</p> <p>$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$</p> <p>$\bar{I}_x = 0.1098R^4$ $\bar{I}_{xy} = 0$</p> <p>$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$ $I_{xy} = 0$</p>	<p>Media parábola</p>  <p>$A = 2/3 b \cdot h$</p> <p>$\bar{x} = \frac{3b}{8}$ $\bar{y} = \frac{3h}{5}$</p> <p>$\bar{I}_x = \frac{8bh^3}{175}$ $I_x = \frac{2bh^3}{7}$</p> <p>$\bar{I}_y = \frac{19b^3h}{480}$ $I_y = \frac{2b^3h}{15}$</p> <p>$\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{60}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{6}$</p>
<p>Triângulo isósceles</p>  <p>$A = 1/2 b \cdot h$</p> <p>$\bar{x} = \frac{bh^3}{36}$ $\bar{y} = \frac{b^3h}{48}$ $I_{xy} = 0$</p> <p>$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = 0$</p>	<p>Cuarto de círculo</p>  <p>$A = \frac{\pi R^2}{4}$</p> <p>$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$</p> <p>$\bar{I}_x = \bar{I}_y = 0.05488R^4$ $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$</p> <p>$\bar{I}_{xy} = -0.01647R^4$ $I_{xy} = \frac{R^4}{16}$</p>	<p>Sector circular</p>  <p>$A = \alpha R^2$</p> <p>$\bar{x} = \frac{2R \text{sen } \alpha}{3\alpha}$</p> <p>$I_x = \frac{R^4}{8} (2\alpha - \text{sen } 2\alpha)$</p> <p>$I_y = \frac{R^4}{8} (2\alpha - \text{sen } 2\alpha)$</p> <p>$I_{xy} = 0$</p>
<p>Triângulo</p>  <p>$A = 1/2 b \cdot h$</p> <p>$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$</p> <p>$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_x = \frac{bh^3}{12}$</p> <p>$\bar{I}_y = \frac{bh^3}{36} (a^2 - ab + b^2)$ $I_y = \frac{bh^3}{12} (a^2 - ab + b^2)$</p> <p>$\bar{I}_{xy} = \frac{bh^2}{72} (2a - b)$ $I_{xy} = \frac{bh^2}{24} (2a + b)$</p>	<p>Cuarto de elipse</p>  <p>$A = 1/4 \pi \cdot a \cdot b$</p> <p>$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$</p> <p>$\bar{I}_x = -0.05488ab^3$ $I_x = \frac{\pi ab^3}{16}$</p> <p>$\bar{I}_y = -0.05488a^3b$ $I_y = \frac{\pi a^3b}{16}$</p> <p>$\bar{I}_{xy} = -0.01647a^2b^2$ $I_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}$</p>	

Figura 3.10 - Centroides e momento de inércia de formas de áreas comuns

Fonte: Adaptada de Beer (2012, p. 487).

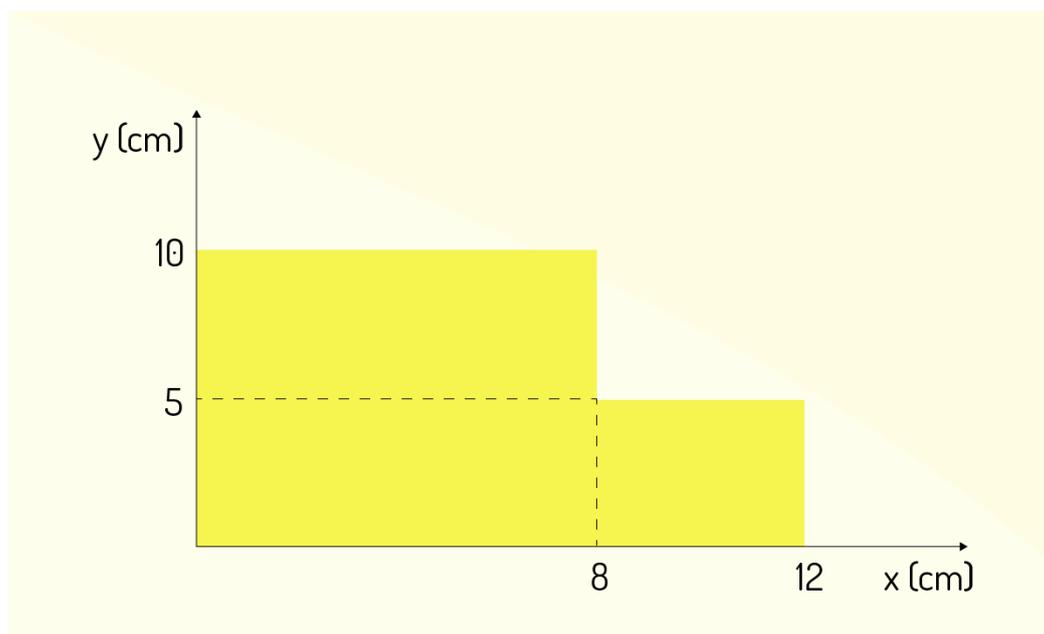
Mais discussões sobre centro de gravidade e momento de inércia de figuras irregulares, circulares e curvilíneas serão realizadas posteriormente.

REFLITA

O conhecimento a respeito de centro de gravidade é de grande importância em muitos esportes, como o judô. Para derrubar o adversário, será preciso deslocar o centro de gravidade, fazendo com que este perca o equilíbrio, o que facilita a queda. No Jiu Jitsu, é válida a mesma proposta, quando a luta se desenvolve no chão, os competidores procuram deslocar o centro de gravidade do seu oponente em todo momento.

ATIVIDADES

1) Uma chapa de metal é construída de forma homogênea, como segue na figura a seguir. Supondo a gravidade constante em todos os pontos, a coordenada do centro de gravidade é:



Fonte: Elaborada pelo autor.

- a) $P_{CG}(10,8;9)$.
- b) $P_{CG}(2,7;3,1)$.
- c) $P_{CG}(5,4;4,5)$.
- d) $P_{CG}(6;5)$.
- e) $P_{CG}(3;2,5)$.

Determinação de Centroides por Integração

Neste momento, trataremos de figuras geométricas irregulares e do método para determinação do centro de gravidade ou centroide; nos casos em que a ação da gravidade é constante, é o método é realizado por integração. A essas integrais, chamamos de **momentos de primeira ordem** em relação aos eixos x e y, respectivamente, como indicado a seguir:

$$M_x = \int y dA$$

$$M_x = y_{CM}A$$

$$M_y = \int x dA$$

$$M_y = x_{CM}A$$

Os momentos de primeira ordem de uma seção de uma barra, por exemplo, são muito utilizados para se determinar a tensão de cisalhamento em resistência dos materiais.

De um Corpo em Duas Dimensões

Podemos afirmar que a centroide coincide com o centro gravitacional nos casos em que a ação da gravidade é constante. Dada uma figura irregular, como podemos ver na Figura 3.11, devemos identificar as coordenadas do seu centro de gravidade.

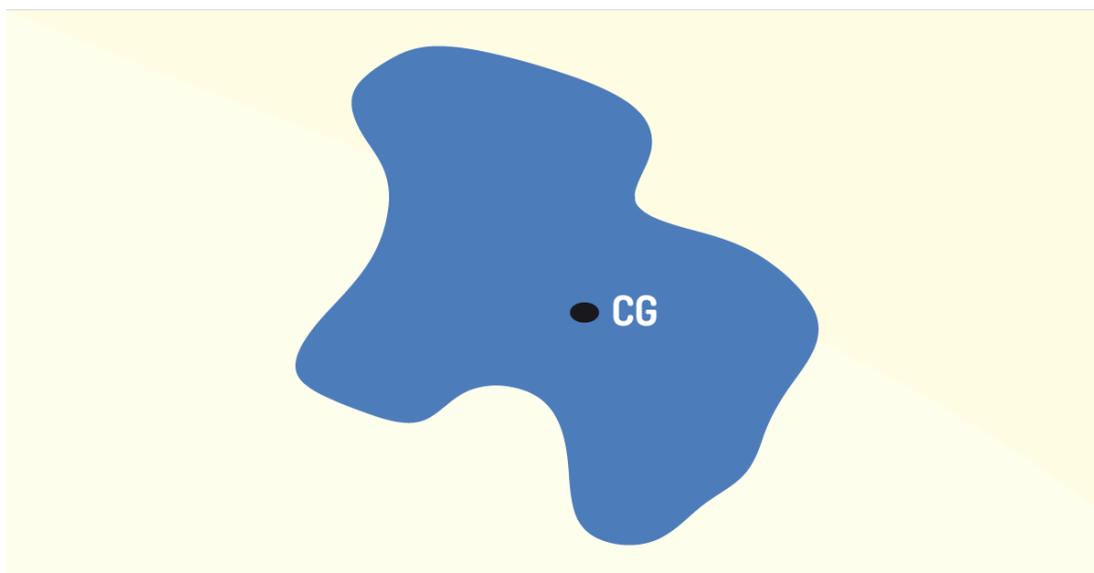


Figura 3.11 - Figura geométrica irregular e seu centro de gravidade

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim como nos casos que já vimos, o nosso ponto de partida é projetar a figura em um plano cartesiano e orientá-la a partir do plano. O segundo passo é identificar um elemento de área dA , de coordenadas x_{EL} e y_{EL} . Os valores das coordenadas x_{EL} e y_{EL} são as coordenadas em x e y, respectivamente, para o elemento dA .

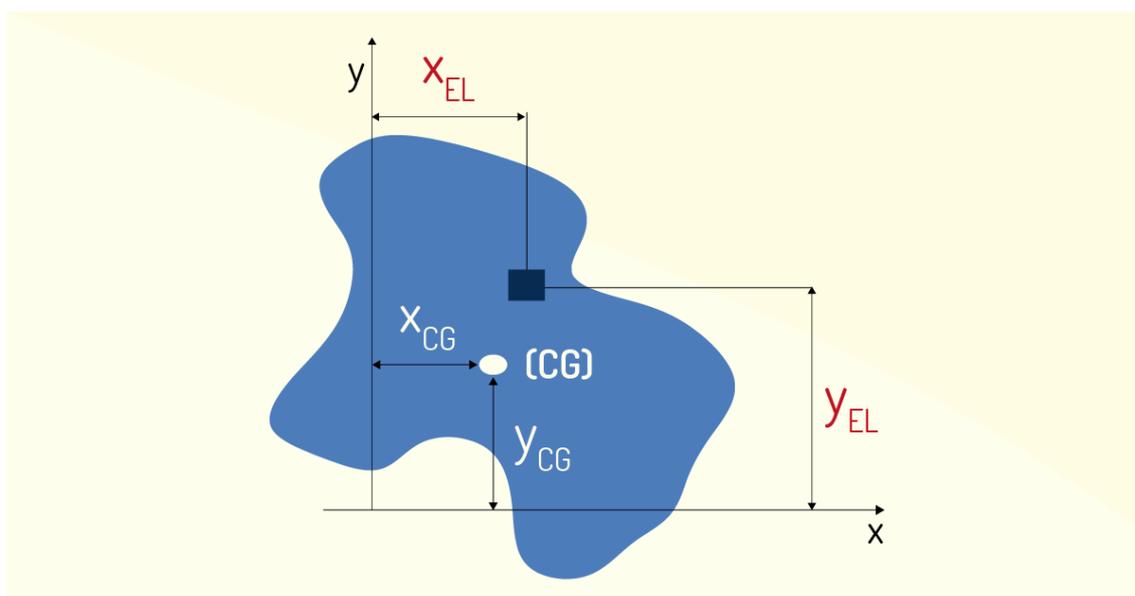


Figura 3.12 - Figura geométrica irregular localizada em um plano cartesiano com as coordenadas do seu centro de gravidade

Fonte: Elaborada pelo autor.

Partindo de $(x_{EL}; y_{EL})$ e integrando sobre toda a área, o centro de gravidade pode ser encontrado matematicamente da seguinte forma:

$$x_{CM} = \frac{\int x_{EL} \times dA}{\int dA}$$

$$y_{CM} = \frac{\int y_{EL} \times dA}{\int dA}$$

A integral $\int x_{EL} \times dA$ é o momento angular estático de área ou de primeira ordem em relação ao eixo y. Da mesma forma, $\int y_{EL} \times dA$ é o momento angular estático de primeira ordem em relação ao eixo x. Já a integral $\int dA$ fornece a área total da figura geométrica.

Vejam os exemplos a seguir.

Determine o centro de gravidade da Figura 3.13 limitada pela função x^2 .

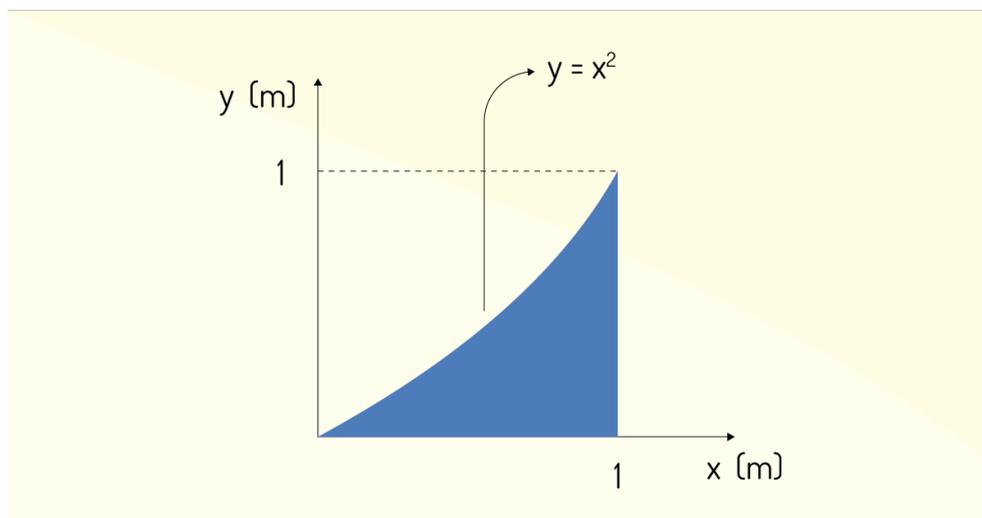


Figura 3.13 - Figura geométrica limitada por uma função $f(x)$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para determinar o centro de gravidade da Figura 3.13, vamos utilizar as equações:

$$x_{CM} = \frac{\int x_{EL} \times dA}{\int dA}$$

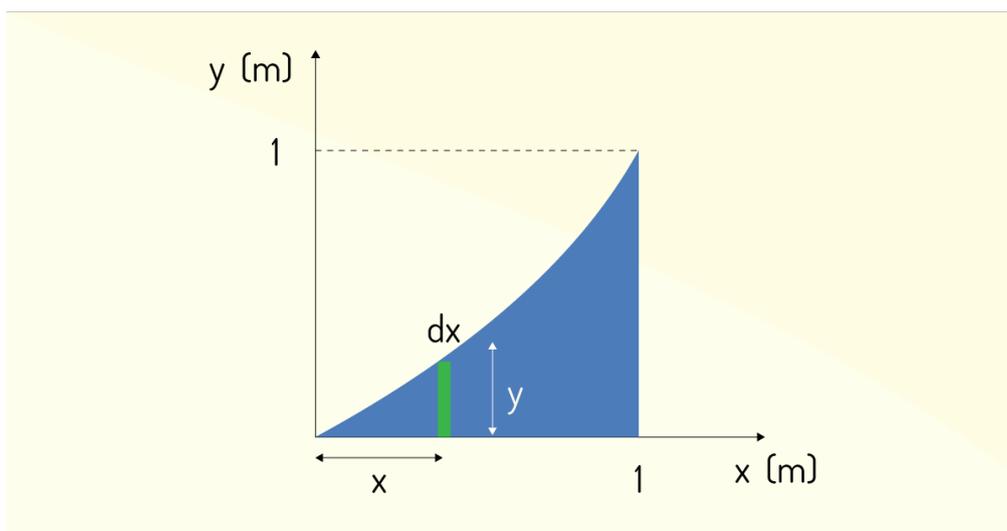


Figura 3.14 - Elemento de área dA e de espessura dx

Fonte: Elaborada pelo autor.

x_{EL} é o centroide da figura de espessura infinitesimal dx , e podemos assumir que $x_{EL} = x$. Da mesma forma, y_{EL} é o centroide da espessura infinitesimal dx e altura y , assim, temos que $y_{EL} = \frac{y}{2}$. O elemento dA é a área do retângulo, calculado multiplicando a base pela a sua altura, logo, temos que $dA = y \cdot dx$. Utilizando todas essas informações na integral $x_{CM} = \frac{\int x_{EL} \times dA}{\int dA}$, temos:

$$x_{CM} = \frac{\int x \times y \times dx}{\int y \times dx}$$

Olhando para a figura, é preciso determinar uma relação entre y e x , haja vista que a variável de integração é a variável x . Como informado, $y = x^2$, basta substituir na integral anterior, e assim obtemos:

$$x_{CM} = \frac{\int x \times x^2 \times dx}{\int x^2 \times dx}$$

realizando o produto no numerador,

$$x_{CM} = \frac{\int x^3 \times dx}{\int x^2 \times dx}$$

Como a variável de integração é o x e ele varia de 0 a 1, substituímos o limite na integral:

$$x_{CM} = \frac{\int_0^1 x^3 \times dx}{\int_0^1 x^2 \times dx}$$

O resultado da integral:

$$x_{CM} = \frac{\frac{x^4}{4}}{\frac{x^3}{3}}$$

Utilizando nossos conhecimentos de matemática básica, mais precisamente propriedades de frações, podemos simplificar o resultado anterior da seguinte forma:

$$x_{CM} = \frac{x^4}{4} \frac{3}{x^3} = \frac{3}{4}x$$

Agora, enfim, basta substituir os valores do limite de integração e vamos obter que:

$$x_{CM} = \frac{3}{4}$$

De forma análoga, o procedimento é realizado para o retângulo de espessura infinitesimal dy , como mostra a Figura 3.15.

$$y_{CM} = \frac{\int y_{EL} \times dA}{\int dA}$$

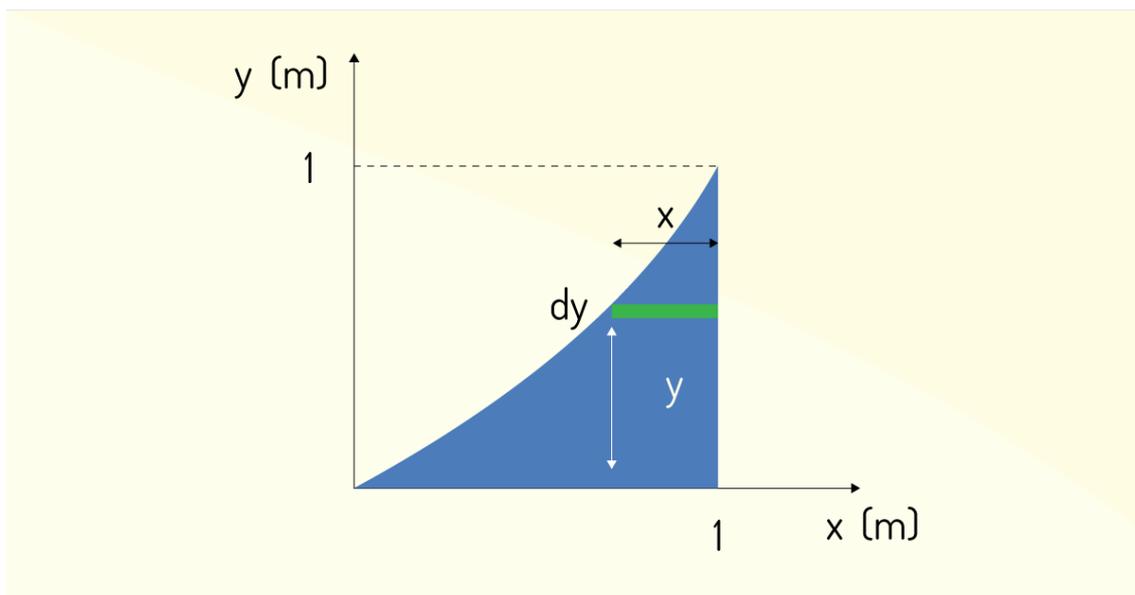


Figura 3.15 - Elemento de área dA e espessura dx

Fonte: Elaborada pelo autor.

y_{EL} é o centroide da figura de espessura infinitesimal dy , e podemos assumir que $y_{EL} = y$. Da mesma forma, x_{EL} é o centroide da espessura infinitesimal dy e altura y , assim temos que $x_{EL} = \frac{(1-x)}{2} + x$. O elemento dA é a área do retângulo, calculado multiplicando a base pela a sua altura, logo, temos que $dA = x \cdot dy$.

$$y_{CM} = \frac{\int y \times (1-x) \times dy}{\int (1-x) \times dy}$$

Para determinar a coordenada y do centro de massa, é preciso resolver a integral anterior. A integral é feita sobre a coordenada y , logo, é preciso encontrar uma relação entre as coordenadas x e y , ou seja, escrever a coordenada x em função da coordenada y . A relação é a seguinte:

$$\sqrt{y} = x$$

substituindo na integral, obtemos:

$$y_{CM} = \frac{\int y \times (1 - \sqrt{y}) \times dy}{\int (1 - \sqrt{y}) \times dy}$$

Fazendo o produto no numerador e adicionando os limites de integração, as integrais ficam:

$$y_{CM} = \frac{\int_0^1 (y - y^{\frac{3}{2}}) \times dy}{\int_0^1 (1 - y^{\frac{1}{2}}) \times dy}$$

Resolvemos separadamente as integrais. A integral do numerador, separamos em duas, como segue:

$$\int_0^1 (y - y^{\frac{3}{2}}) \times dy = \int_0^1 y \times dy - \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} \times dy =$$

Ao utilizar a regra da potencial para a integral, ficamos com:

$$\int_0^1 (y - y^{\frac{3}{2}}) \times dy = \frac{y^2}{2} - \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} =$$

Ao utilizar propriedades de frações, podemos escrever:

$$\int_0^1 (1 - y^{\frac{3}{2}}) \times dy = y - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} =$$

Ao realizar o mesmo procedimento para integral do denominador, separando em duas integrais, vamos obter:

$$\int_0^1 (1 - y^{\frac{3}{2}}) \times dy = \int_0^1 y \times dy - \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} \times dy =$$

Ao resolver a integral da mesma forma, temos que:

$$\int_0^1 (1 - y^{\frac{3}{2}}) \times dy = y - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

Ao ajustar o resultado e utilizar os mesmos conceitos de fração, obtemos:

$$\int_0^1 (1 - y^{\frac{3}{2}}) \times dy = y - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}$$

Ao substituir os limites de integração da resposta da integral do numerador, ficamos com:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10}$$

Da mesma forma, ao substituir os limites de integração para as integrais do denominador:

$$y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

A resposta final da coordenada y do centro de gravidade da figura dada é:

$$y_{CM} = \frac{3}{10}$$

De um Corpo em Três Dimensões

De forma análoga ao que foi feito para uma figura plana, o centro de gravidade para uma figura volumétrica ou tridimensional pode ser determinado matematicamente da seguinte forma:

$$x_{CM} = \frac{\int x_{EL} \times dV}{\int dV}$$

$$y_{CM} = \frac{\int y_{EL} \times dV}{\int dV}$$

$$z_{CM} = \frac{\int z_{EL} \times dV}{\int dV}$$

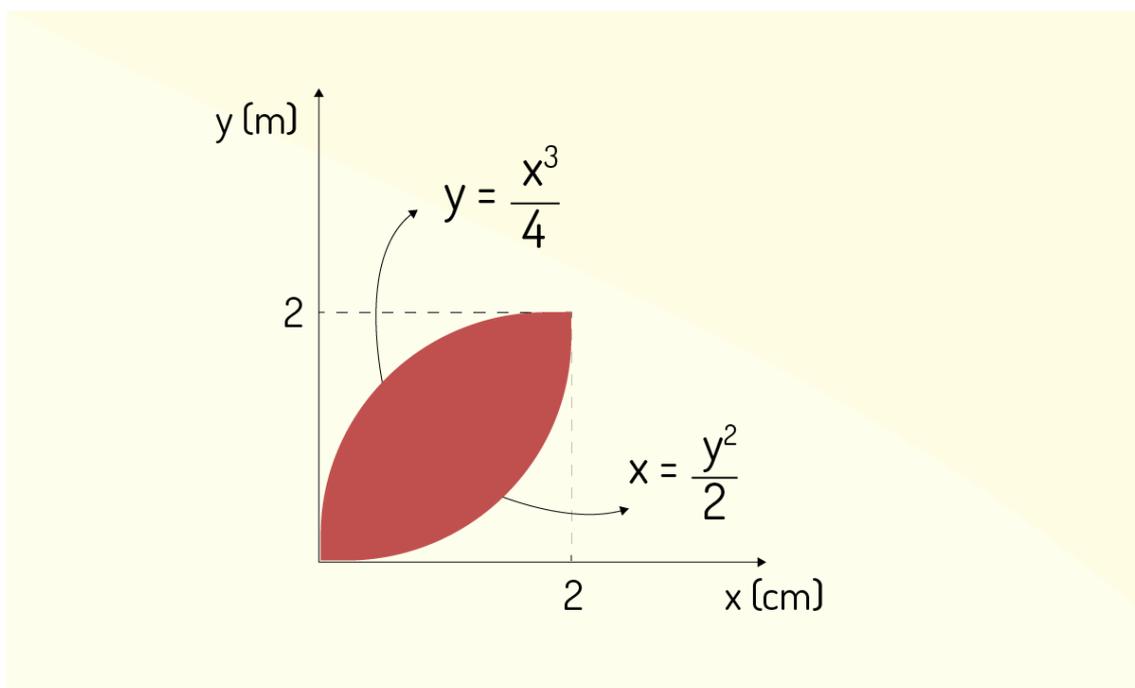
Da mesma forma, a integral $\int x_{EL} \times dV$ é o momento angular estático ou momento angular de primeira ordem de volume em relação ao plano yz . A integral $\int y_{EL} \times dV$ é o momento angular estático ou momento angular de primeira ordem de volume em relação ao plano xz . Já a integral $\int z_{EL} \times dV$ é o momento angular estático ou momento angular de primeira ordem de volume em relação ao plano xy . Por fim, a integral $\int dV$ fornece o volume total da figura.

FIQUE POR DENTRO

No link a seguir, você terá o passo a passo de como identificar o centro de gravidade de figuras geométricas irregulares utilizando integrais. Este é material base para melhor compreensão do conteúdo estudado. Veja mais em: <https://www.youtube.com/watch?v=O4NtwxwB5cM>. Acesso em: 08 jan. 2020.

ATIVIDADES

2) Considerando as figuras geométricas irregulares e o método para determinação do centro de gravidade ou centroide, nos casos em que a ação da gravidade é constante, o método é feito por integração. Dada a figura a seguir, as coordenadas do centro de gravidade da chapa homogênea limitada pelas curvas $y = \frac{x^3}{3}$ e $x = \frac{y^2}{2}$ são de:



Fonte: Elaborada pelo autor.

- a) $P_{CG}(15/8; 3/4)$.
- b) $P_{CG}(20/9; 3/4)$.
- c) $P_{CG}(24/25; 8/9)$.
- d) $P_{CG}(6/7; 3/4)$.
- e) $P_{CG}(24/25; 6/7)$.

Momentos de Inércia de Superfícies

Como já visto anteriormente, momento de inércia mede quantitativamente a capacidade dos corpos girar em torno de um ponto de referência. Agora, vamos abordar a capacidade que alguns corpos apresentam em girar em torno de um eixo, momento de inércia de superfície ou uma figura plana. Na Figura 3.16, há o momento de inércia de figuras geométricas simples.

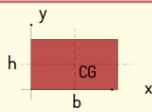
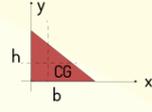
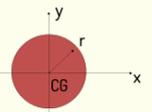
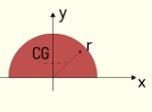
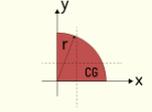
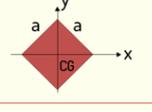
Superfície Plana		\bar{x}	\bar{y}	Área
Retângulo e Quadrado		$\bar{x} = \frac{b}{2}$	$\bar{y} = \frac{h}{2}$	$A = b.h$
Triângulo retângulo		$\bar{x} = \frac{b}{3}$	$\bar{y} = \frac{h}{3}$	$A = b.h/2$
Círculo		$\bar{x} = 0$	$\bar{y} = 0$	$A = \pi . r^2$
Semicírculo		$\bar{x} = 0$	$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$A = \pi.r^2/2$
1/4 círculo		$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$A = \pi.r^2/4$
Losango		$\bar{x} = 0$	$\bar{y} = 0$	$A = a^2$

Figura 3.16 - Momento de inércia de formas geométricas simples

Fonte: Adaptada de Beer (2012, p. 487).

A Figura 3.16 oferece um giro em torno do eixo x e do eixo y, e a expressão matemática é dada a seguir:

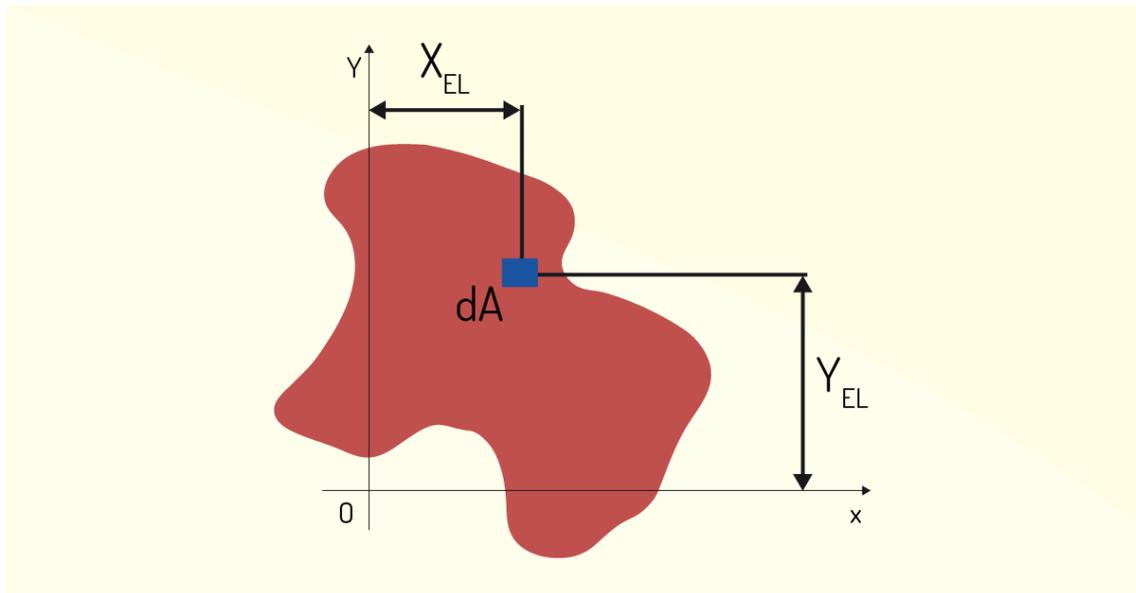


Figura 3.17 - Elemento de área dA de uma figura geométrica

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$M_x = \int y^2 dA$$

$$M_y = \int x^2 dA$$

O elemento dA é o segmento de área da figura, x é a distância do elemento de área até o eixo x , e y é a distância do elemento de área até o eixo y . Na Figura 3.17, os elementos são representados por x_{EL} e y_{EL} , coordenada x do elemento de área e coordenada y do elemento de área, respectivamente. A escolha do elemento de área é de grande importância visando facilitar os cálculos com as integrais.

Vejamos um exemplo para a aplicação das fórmulas citadas anteriormente.

Uma chapa de metal ilustrada sobre o eixo x e y , como na Figura 3.18. Determine o momento em relação aos eixos x e y .

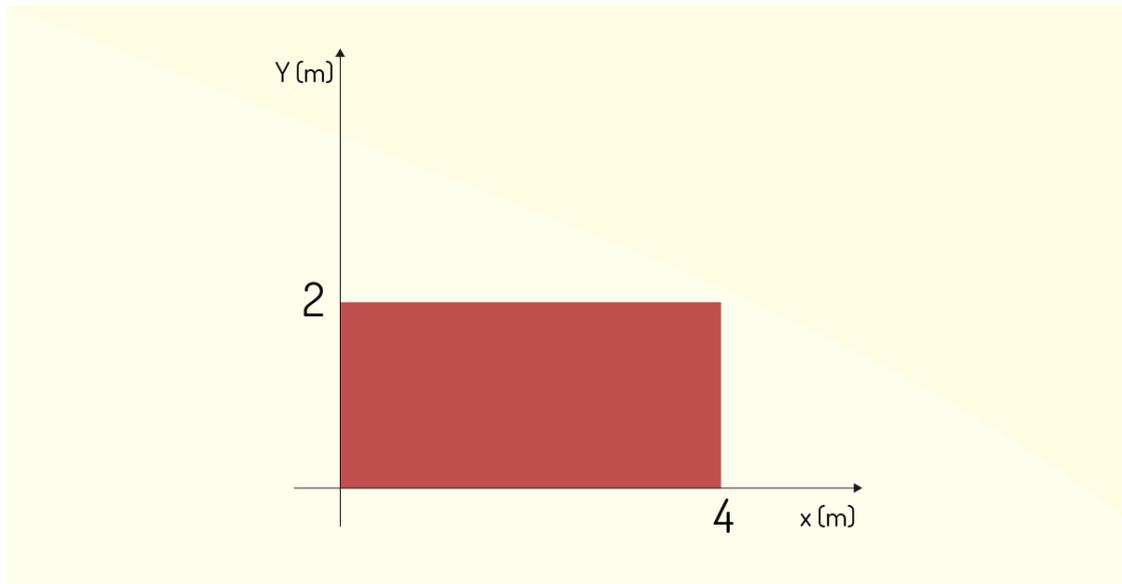


Figura 3.18 - Chapa de metal em um sistema de coordenadas

Fonte: Elaborada pelo autor.

As equações são:

$$M_x = \int y^2 dA \qquad M_y = \int x^2 dA$$

Primeiro, vamos encontrar o momento em x.

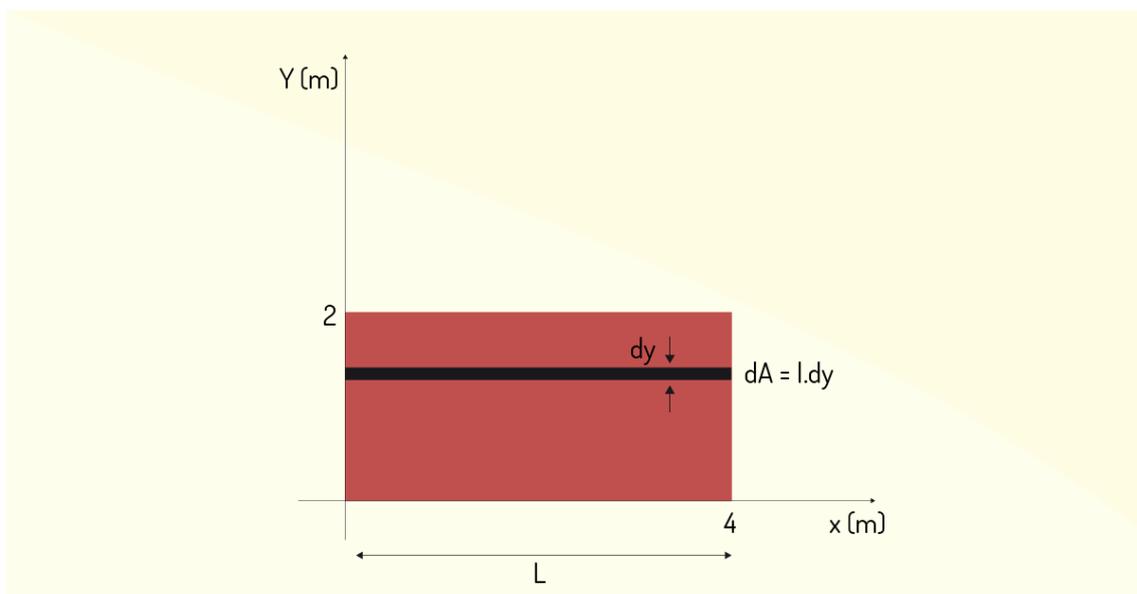


Figura 3.19 - Elemento de área dA e espessura dy da chapa de metal

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assumimos que:

$$dA = l \times dy$$

em que l é o comprimento da barra, nesse caso, $l = 4$ m e, substituindo na integral do momento em x , obtemos:

$$M_x = \int y^2 \times l \times dA$$

Tirando a constante h para fora da integral e incluindo os limites de integração, temos:

$$M_x = l \int_0^2 y^2 \times dy$$

Ao resolver a integral, uma integral simples, ficamos com:

$$M_x = l \frac{y^3}{3}$$

em que y varia de 0 a 2, largura da barra. Ao substituir os limites de integração e o valor de $l = 4$ m, o momento em $M_x = \frac{32}{3} N \cdot m$

O procedimento é análogo para o momento em torno do eixo y .

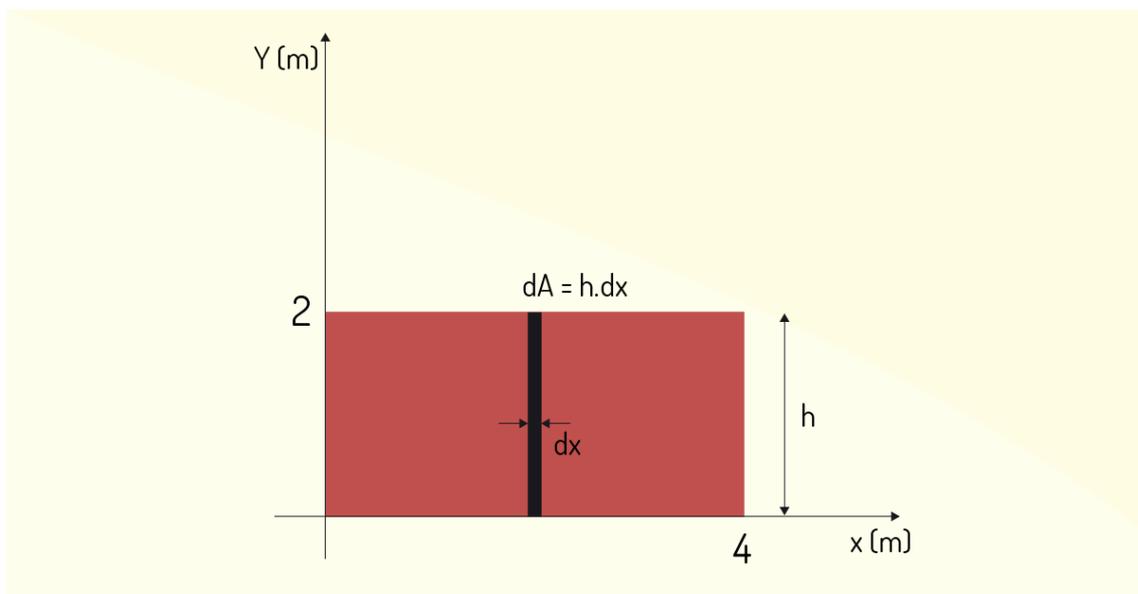


Figura 3.20 - Elemento de área dA e espessura dx da chapa de metal

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assumimos que:

$$dA = h \times dx$$

em que l é a largura da barra, nesse caso, $l = 4$. Ao fazer da mesma forma, substituímos a expressão anterior na integral.

$$M_y = \int x^2 \times h \times dx$$

tirando a constante l para fora de integral e adicionando os limites de integração, ficamos com:

$$M_y = h \int_0^4 x^2 \times dx$$

Ao resolver a integral, obtemos:

$$M_y = h \frac{x^3}{3}$$

em que x varia de 0 a 4. Substituindo o valor de $h = 2$ no resultado da integral anterior, o momento em relação ao eixo y é de $M_y = \frac{128}{3} N.m$.

Teorema dos Eixos Paralelos

O teorema dos eixos paralelos nos dirá que, se conhecemos o momento de um corpo em relação a um eixo passando pelo centro de gravidade, é possível determinar facilmente o momento em relação a qualquer outro eixo paralelo a esse. Veja a Figura 3.21.

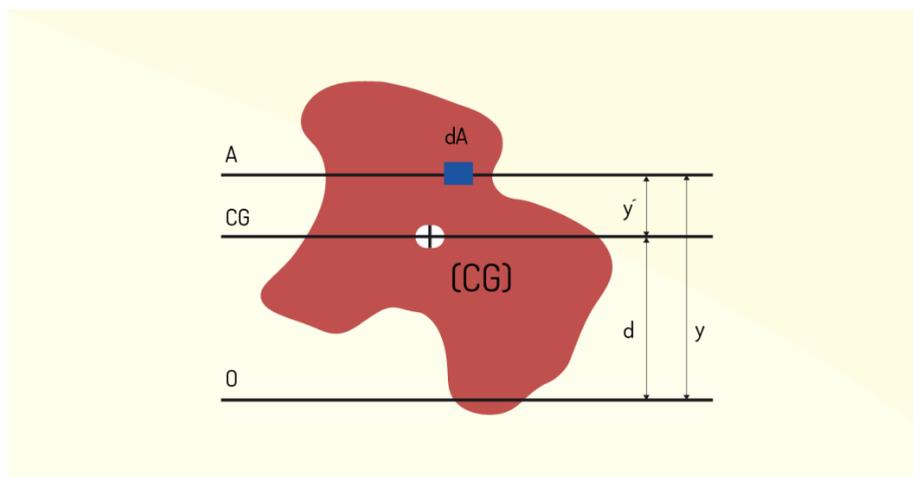


Figura 3.21 - Teorema dos eixos paralelos

Fonte: Elaborada pelo autor.

O momento sobre o eixo O pode ser calculado da seguinte forma:

$$M_O = \int y^2 dA$$

substituindo y^2 por $(y' + d)^2$, obtemos:

$$M_O = \int (y' + d)^2 dA$$

Ao desenvolver o quadrado e separar em três integrais, como segue abaixo:

$$M_O = \int y'^2 dA + \int 2y'dd + \int d^2 dA$$

A primeira integral já é conhecida.

$$M_O = \int y'^2 dA$$

A segunda integral, vindo do produto misto, é zero, pois se refere ao centro de gravidade.

$$2d = \int y'^2 dA = 0$$

A última integral, obtemos da seguinte maneira:

$$\int d^2 dA = d^2 \times A$$

Portanto,

$$M_{xA} = \int y'^2 dA + d^2 \times A$$

Substituindo a integral pelo momento já conhecido, obtemos:

$$M_{xA} = M_{xCG} + d^2 \times A$$

Da mesma forma, é válido para o momento em relação ao eixo y, ficando com:

$$M_{yA} = \int x'^2 dA + d^2 \times A$$

e

$$M_{xA} = M_{yCG} + d^2 \times A$$

Momento de Inércia Polar

Outro tipo de material que merece ser analisado são aqueles com geometria circular. Nesse caso, é preciso utilizar coordenadas polares para determinar o momento angular desses materiais em relação a um eixo.

FIQUE POR DENTRO

No link a seguir, há um exemplo de como calcular o momento de inércia em relação a um ponto de uma figura circular utilizando coordenadas polares. Nesse exemplo, é necessária compreensão de mudanças de coordenadas, de coordenadas cartesianas para polares. Assista em: <https://www.youtube.com/watch?v=z2XBqJDkgHk>. Acesso em: 08 jan. 2020.

FIQUE POR DENTRO

No link a seguir, você pode ver um exemplo no qual é resolvido e determinado o momento de inércia de um cilindro de raio R e massa m ao redor do eixo z . A solução desse exemplo pode ser usada para ajudar na solução da atividade proposta nesta unidade. Assista em: <https://www.youtube.com/watch?v=cfGDMchY9wE>. Acesso em: 08 jan. 2020.

ATIVIDADES

3) Um cilindro homogêneo de massa 25 g e raio de 0,5 cm, que se encontra ao longo do eixo z , tende a girar em torno desse mesmo eixo. O momento de inércia em torno do eixo z para o cilindro é de:

- a) $312 \mu N \cdot m$.
- b) $31,2 \mu N \cdot m$.
- c) $3,1 \mu N \cdot m$.
- d) $0,31 \mu N \cdot m$.
- e) $0,03 \mu N \cdot m$.

Momento de Inércia de Corpos

Aqui, você verá conceitos e exemplos de como calcular o momento de inércia de corpos volumétricos ao redor de um eixo. Algumas definições sobre momento já foram trazidas ao longo da unidade, e nada melhor para entender um pouco mais do que a resolução de exemplos.

Imaginemos um corpo de massa m posto para girar em torno de um eixo. O corpo de massa m pode ser dividido em vários elementos infinitesimais de massa dm . O momento de inércia do corpo pode ser calculado da seguinte forma:

$$M = \int r^2 dm$$

em que r é a distância do elemento dm até o eixo.

O momento de inércia escrito matematicamente acima pode ser expresso em relação a um eixo de coordenadas x, y, z do elemento dm , como ilustrado na Figura 3.22.

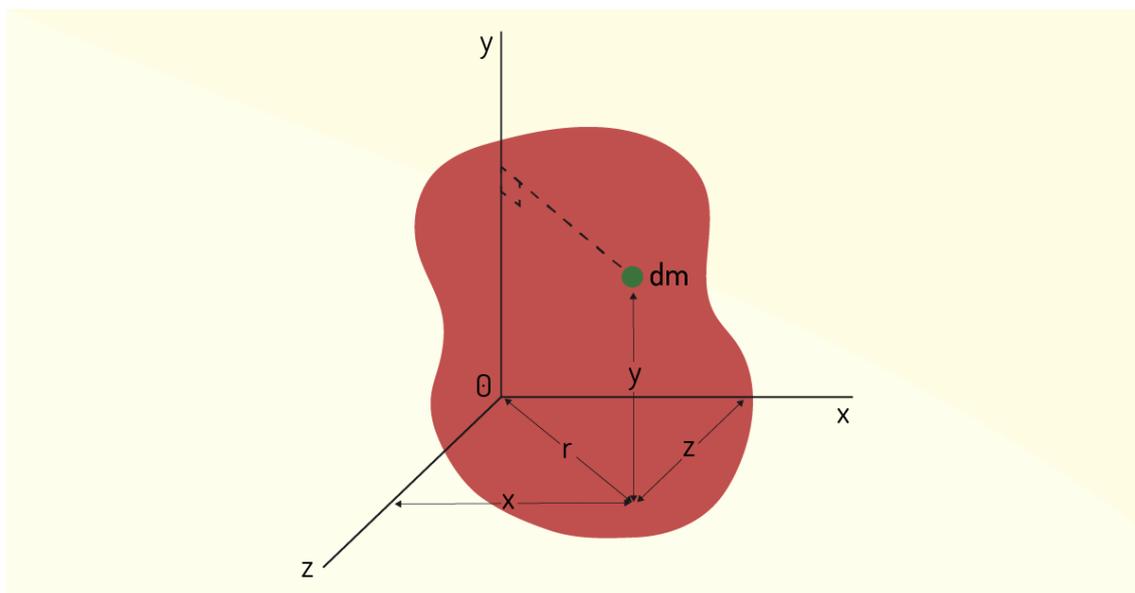


Figura 3.22 - Sistema de coordenadas do elemento de massa dm

Fonte: Beer (2012, p. 514).

A partir da primeira equação, podemos escrever outras três equações para os momentos de inércia em relação aos eixos x, y e z .

$$M_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$M_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$M_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

Veja a Figura 3.23 com o momento de inércia de figuras geométricas conhecidas.

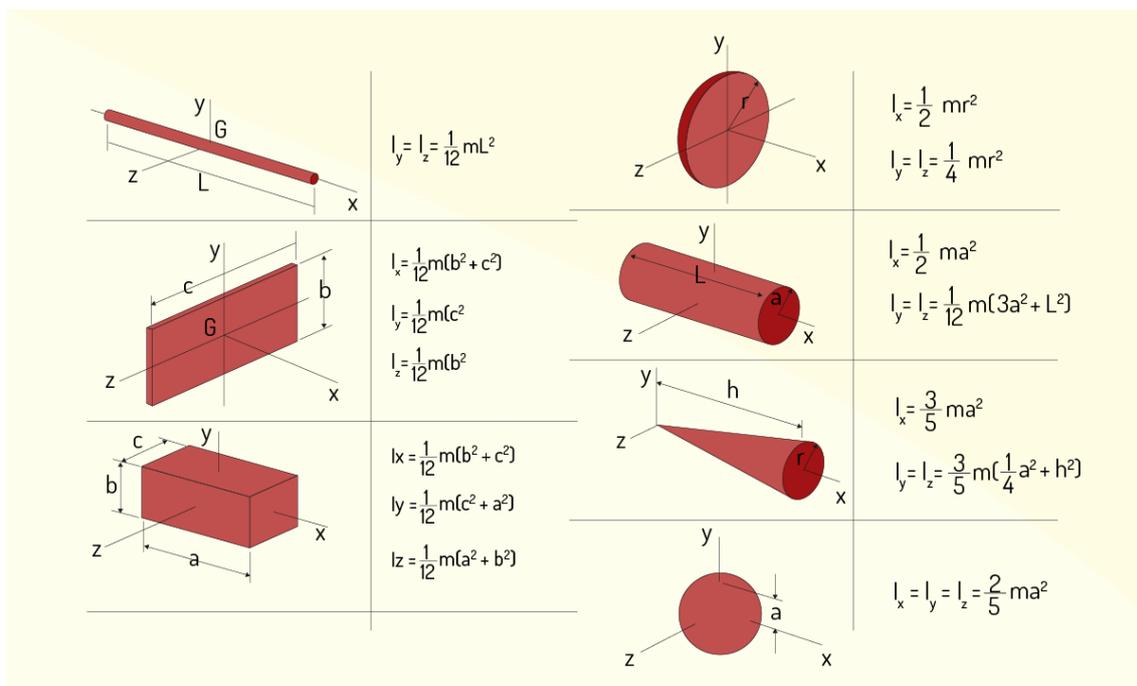


Figura 3.23 - Momento de inércia de corpos de formatos geométricos simples (melhorar o recorte da figura)

Fonte: Beer (2012, p. 518).

Na Figura 3.23, o momento de inércia é trazido com a letra **I**, bastante comum em alguns materiais. Em nosso material, padronizamos o momento como a letra **M**.

Outro exemplo: determine o momento de inércia de uma barra homogênea de massa m em relação a um eixo perpendicular a ela:

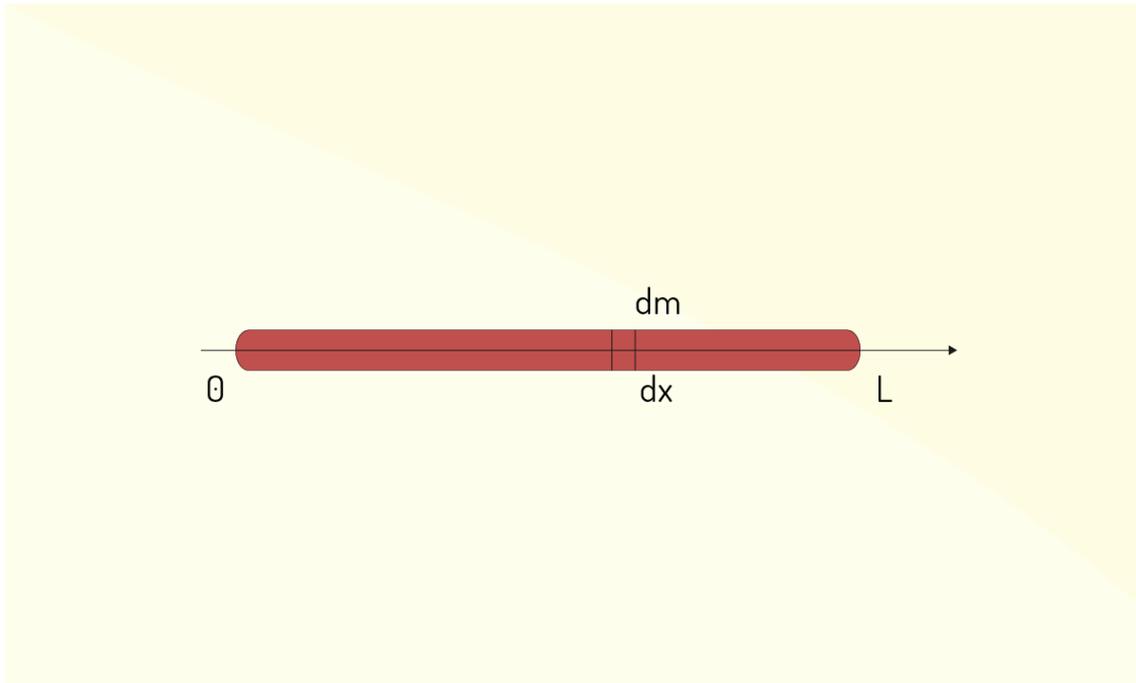


Figura 3.24 - Barra homogênea ao longo do eixo x

Fonte: Elaborada pelo autor.

O segmento de comprimento dx tem massa dm , e a relação abaixo pode ser estabelecida:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{L}$$

isolando a massa do elemento infinitesimal,

$$dm = \left(\frac{m}{L}\right) dx$$

A integral para determinar o momento de inércia pode ser escrita como segue:

$$\int x^2 dm$$

Substituindo dm na integral anterior,

$$\int x^2 \left(\frac{m}{L}\right) dx$$

tirando a constante para fora da integral e substituindo os limites de integração, que é o próprio comprimento da barra:

$$\left(\frac{m}{L}\right) \int_0^L x^2 dx$$

Ao resolver a integral definida, temos:

$$\left(\frac{m}{L}\right) \int_0^L x^2 dx = \left(\frac{m}{L}\right) \frac{L^3}{3}$$

E o momento de inércia é:

$$M = m \frac{L^2}{3}$$

Vejamos o próximo caso.

Dado um prisma como segue, de dimensões, determine o momento de inércia em relação ao eixo z.

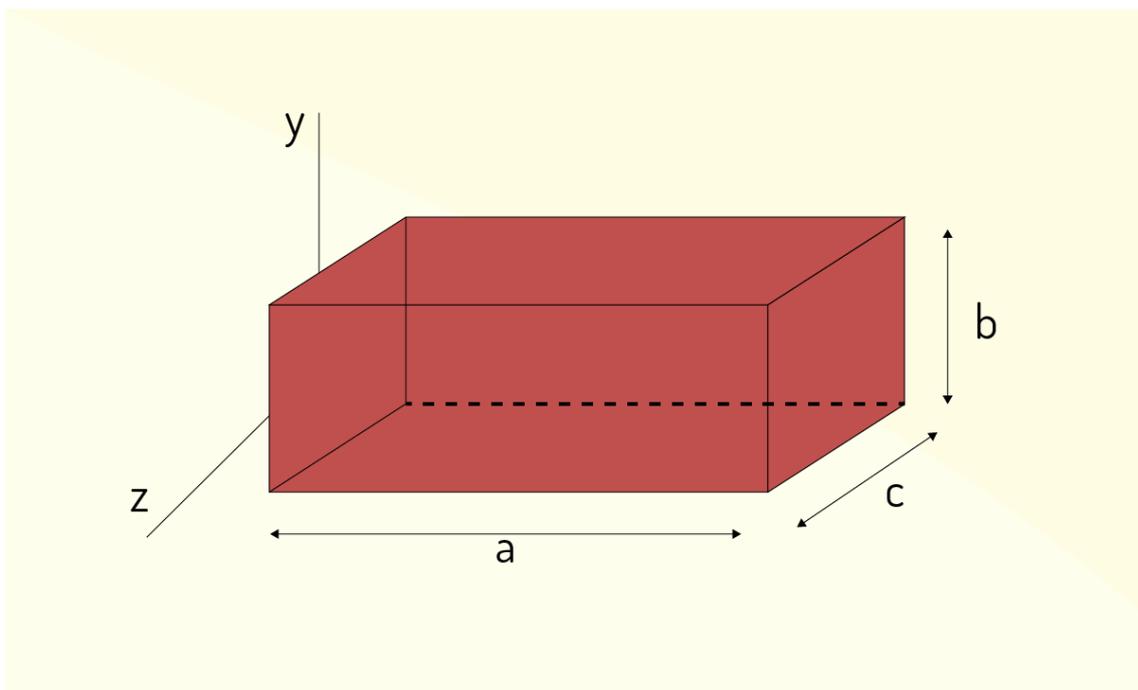


Figura 3.25 - Prisma retangular em um sistema de coordenadas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Supondo o prisma retangular de densidade homogênea,

$$\rho = \frac{m}{V}$$

A expressão da massa em função do volume é dada por:

$$m = \rho \times V$$

As dimensões são $a \times b \times c$, e o volume é calculado pelo produto entre os lados da figura, chegando à seguinte equação:

$$m = \rho abc$$

Do prisma retangular, pegamos um elemento infinitesimal de comprimento dx , como na Figura 3.26.

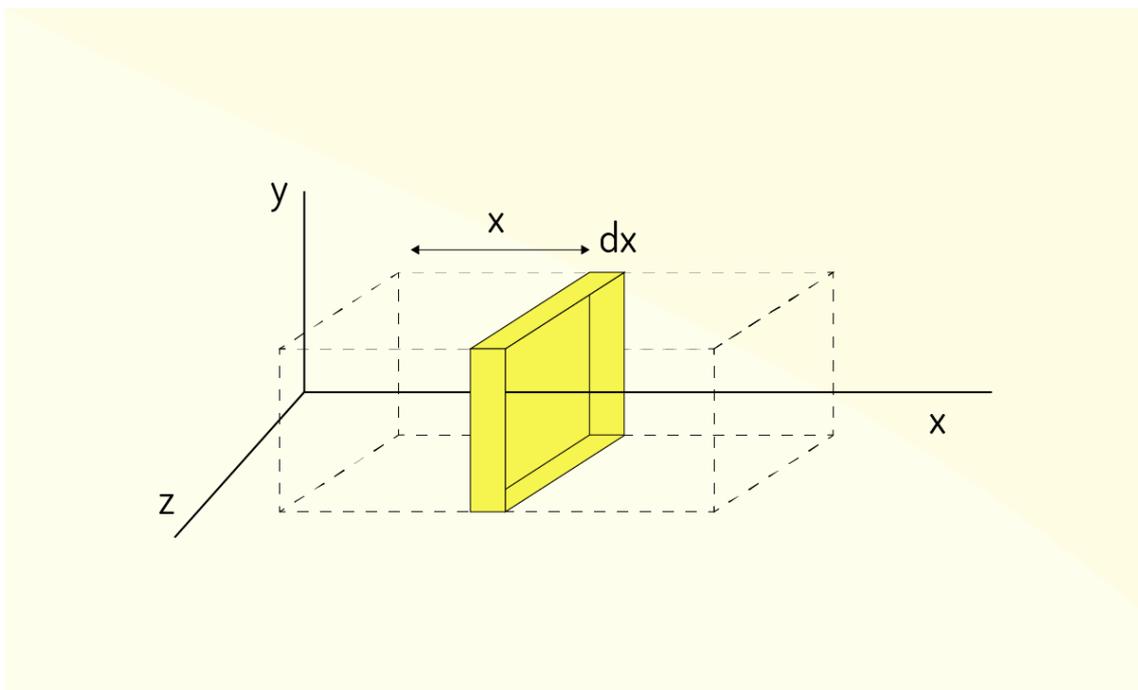


Figura 3.26 - Elemento de volume de espessura dx

Fonte: Elaborada pelo autor.

O elemento de massa desse elemento é:

$$dm = \rho bcdx$$

O momento de uma placa de espessura infinitesimal ao longo do eixo z é dado na tabela e tem valor de:

$$M_{z'} = \frac{1}{12}mb^2$$

Como estamos olhando apenas para um elemento de massa dm , o momento em relação ao eixo z desse elemento é:

$$dM_z = \frac{1}{12} b^2 dm$$

Ao recordar o teorema dos eixos paralelos visto anteriormente e supor a gravidade constante ao longo de todo o material, podemos substituir a área pelo valor da massa. Sendo assim, a expressão para o momento é:

$$M_z = M_{z'} + x^2 \times m$$

Então, o momento de uma pequena porção de massa do prisma pode ser escrito:

$$dM_z = dM_{z'} + x^2 \times dm$$

Substituindo o valor do momento sobre a pequena porção de massa,

$$dM_z = \frac{1}{12} b^2 dm + x^2 \times dm$$

isolando as massas e colocando em evidência, temos:

$$dM_z = \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \times dm$$

Ao substituir o elemento de massa:

$$dM_z = \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \rho b c dx$$

podemos reescrever a expressão acima da seguinte anterior:

$$dM_z = \rho b c \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) dx$$

A integral do momento em torno do eixo z pode ser escrita como sendo a integral de todos os pequenos elementos:

$$M_z = \int dM_z$$

Substituindo:

$$\int dM_z = \int \rho b c \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) dx$$

Separando em duas integrais e incluindo os limites de integração, em que x vai de zero até a .

$$\int dM_z = \rho bc \left(\int_0^a \frac{1}{12} b^2 dx + \int_0^a x^2 dx \right)$$

Resolvendo a integral já conhecida e utilizando o método da potencial para as integrais, obtemos que o momento:

$$M_z = \rho bc \left(\frac{1}{12} b^2 a + \frac{a^3}{3} \right)$$

Como aparece a constante a em ambos os termos, podemos colocar em evidência:

$$M_z = \rho bc \left(\frac{1}{12} b^2 + \frac{a^3}{3} \right)$$

Ao substituir as constantes pela massa, a expressão para o momento em torno do eixo z para a figura dada é a seguinte:

$$M_z = m \left(\frac{1}{12} b^2 + \frac{a^3}{3} \right)$$

O resultado é o momento de inércia para o prisma retangular em torno do eixo z . Com o cálculo feito acima, é possível resolver a atividade proposta da unidade.

ATIVIDADES

4) Supondo que o material do exemplo acima seja uma pequena barra de ouro de 77,28 g, de dimensões 4,0 cm \times 2,0 cm \times 0,5 cm, sendo comprimento, largura e espessura, respectivamente, o momento dessa barra em torno do eixo z será de:

- a) 7,3 kN.m.
- b) 734 N.m.
- c) 73,4 N.m.
- d) 73,4 mN.m.
- e) 73,4 μ N.m.

INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: Mecânica vetorial para engenharia

Editora: AMGH Editora LTDA

Autor: Ferdinand Pierre Beer e Elwood Russell Johnston

ISBN: 978-85-8055-144-0

Comentário: Para complementar os conteúdos estudados, este livro deve ser usado como material-base para quem deseja ter sucesso na disciplina. Determinação do centro de gravidade, momento de inércia por meio de somatório e de integrais, para somas infinitesimais.

UNIDADE IV

Deformações Mecânicas

Helena Aparecida Guimarães Brito de Araujo

Introdução

A partir do estudo da resistência dos materiais, é possível conhecer as propriedades mecânicas de sólidos reais, para fins de projetos, modelagem e cálculo de estruturas, de modo que, aliada à mecânica do sólidos, podemos dizer que essa viabiliza uma melhor compreensão de grandezas, como a tensão e a deformação de materiais, além das relações entre as cargas externas aplicadas ao corpo deformável e as forças internas que atuam dentro dele. Complementar a esses conteúdos, podemos citar o estudo de sua estabilidade quando submetida a solicitações externas (HIBBELER, 2004). Diante disso, nesta unidade, trataremos de deformação, cargas axiais, torção e cisalhamento.



Fonte: Visharo / 123RF.

Conceitos Iniciais de Resistência dos Materiais

Precisamos discutir alguns conceitos em resistência dos materiais essenciais para nosso entendimento dessa ciência como um todo. Sendo assim, começaremos com algumas propriedades mecânicas dos materiais, como:

- **ductilidade** ou **ductibilidade**: propriedade física de alguns materiais em tolerar a deformação plástica, ante ação de cargas sem apresentar rompimento ou fratura. Esse processo absorve grande quantidade de energia, de modo que materiais que suportam pouca ou nenhuma deformação no processo de ensaio de tração são chamados de frágeis.
- **fragilidade**: propriedade de alguns materiais em perder seu estado inicial com facilidade, ou seja, materiais que sofrem fratura ou ruptura diante de pouca deformação. A fragilidade é contrária à tenacidade (o impacto necessário para levar um material à ruptura, ou seja, quantidade de energia que um material pode absorver antes de fraturar), pois absorve pouca energia, conforme Figura 4.1.

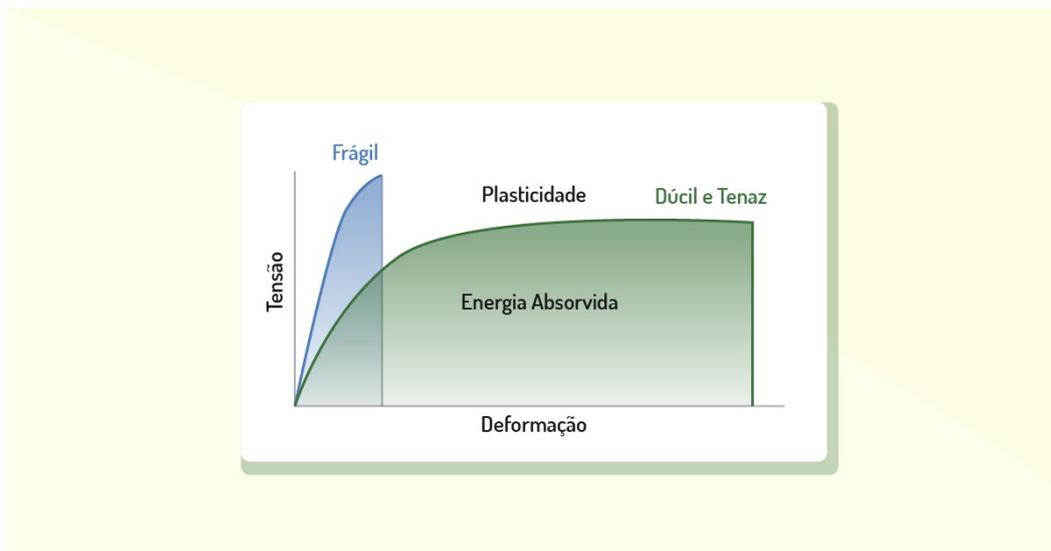


Figura 4.1 - Representação gráfica de ductilidade e fragilidade

Fonte: Elaborada pela autora.

- **elasticidade**: propriedade dos materiais em reagir à deformação quando solicitados por uma carga, de forma a retornarem ao estado inicial quando esta não mais atuar sobre o material.
- **plasticidade**: propriedade responsável pela deformação dos materiais, ou seja, quando submetidos à ação de uma carga, eles não retornam à forma original.

Deformação

Esse tipo de mudança na forma do material é resultante de uma força tanto interna quanto externa, e pode ser do tipo extensiva ou compressiva, a partir da variação da pressão, temperatura ou mudança estrutural; e medida, segundo a mudança no comprimento do material.

Quando a deformação é resultado de um alongamento ou contração em um pequeno intervalo por unidade de comprimento (ΔS e $\Delta S'$), a chamamos de **deformação normal** $\varepsilon_{méd}$.

A deformação normal pode ser calculada a partir de $\varepsilon_{méd} = \frac{\Delta S' - \Delta S}{\Delta S}$.

Todavia, quando esses intervalos são retas perpendiculares e sofrem uma variação na angulação, temos a **deformação por cisalhamento** γ_{nt} , ou seja, em se tratando de materiais, podemos dizer que há certa variação no ângulo θ' de uma fibra, por exemplo, em relação a um plano. A deformação por cisalhamento pode ser calculada a partir de $\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \theta'$.

Vale lembrar que a deformação é medida com precisão por meio de sensor específico (geralmente do tipo metálico e de junção), o qual varia sua resistência elétrica de maneira proporcional à deformação mecânica, ou seja, por meio de comparação, identifica as mudanças ocorridas no comprimento da amostra quando certa carga é aplicada a ela. Tal medida é mais precisa em materiais homogêneos, visto que os não homogêneos podem apresentar diversas complicações durante as medições, fornecendo medidas de deformação imprecisas.

Além do conceito de deformação, é importante que o estudante seja íntimo do conceito de tensão σ , o qual indica a intensidade das forças, as quais podem produzir dilatação, compressão ou torção no material, dada por $\sigma = \frac{P}{A}$, ou seja, descreve a força **P** por unidade de área.

Vale lembrar que se o material tem comportamentos do tipo linear e plástico, podemos aplicar a ele a Lei de Hook, dada por $\sigma = E\varepsilon$, de modo que haja uma relação proporcional entre a deformação e tensão dada por $\varepsilon = \frac{\theta}{E} = \frac{P}{AE} = \frac{P}{EA}$.

FIQUE POR DENTRO

Para melhor compreender os conceitos de deformação, você pode recorrer a diversos materiais disponíveis na internet, como a Aula 4 sobre deformações e propriedades mecânicas, dos materiais do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, do professor Luiz Eduardo Miranda, disponível em: <http://www.engbrasil.eng.br/pp/res/aula4.pdf>. Acesso em: 08 jan. 2020.

REFLITA

Vale lembrar que a deformação mecânica não pode ser encarada como uma tragédia a ser evitada na engenharia, ela pode ser bastante útil quando usada adequadamente, por meio da conformação de materiais. Em busca da aplicação de seu conhecimento, faça uma breve pesquisa sobre os principais processos de conformação: forjamento, laminação, trefilação e extrusão.

ATIVIDADES

1) A deformação na forma do material é resultante de uma força tanto interna quanto externa, e pode ser do tipo extensiva ou compressiva, a partir da variação da pressão, temperatura ou mudança estrutural; e medida, segundo a mudança no comprimento do material. Assim, é correto afirmar que a deformação normal na direção y sofrida por uma chapa de comprimento inicial 5,656854 polegadas e comprimento final de 5,660399 polegadas tem valor, em porcentagem, de:

- a) $6,3667 \times 10^{-2}$.
- b) $6,2628 \times 10^{-4}$.
- c) $5,66 \times 10^{-4}$.
- d) $6,2667 \times 10^{-2}$.
- e) $2,06 \times 10^{-2}$.

2. Cargas axiais

Percebemos que os materiais podem ser expostos a diversas propriedades que alterarão sua dinâmica e estrutura, dos quais podemos citar a aplicação de uma força devido a uma carga axial, ou seja, aplicação de uma carga e força dissipadas ao longo do eixo central, como uma carga aplicada na mesma direção (vertical) de um pilar.

Princípio de Saint-Venant

Para estudarmos as diferentes formas de aplicação de uma carga em um material ou estrutura, começaremos com o Princípio de Saint-Venant, que, além do caso citado anterior, permite analisar situações nas quais a carga se encontra concentrada, considerando uma distribuição uniforme das tensões à medida que nos afastamos da região de aplicação dela e desconsiderando a distribuição das tensões nas regiões mais próximas ao ponto de aplicação, pois, para essas condições, seriam necessários métodos matemáticos avançados, os quais não cabem aos nossos

estudos atuais, o que nos permite concluir que as tensões que se encontram mais próximas à carga tenderão a uma distribuição mais variável em dada seção transversal. Ainda, considerando um corpo sob ação de uma carga como um corpo situado entre duas placas, de modo que sobre elas haja uma tensão uniforme, podemos afirmar que tal tensão também será distribuída ao longo de todas as seções transversais e extensão do corpo, desde que sejam seguidas as condições de distanciamento mínimo do ponto de aplicação da carga concentrada.

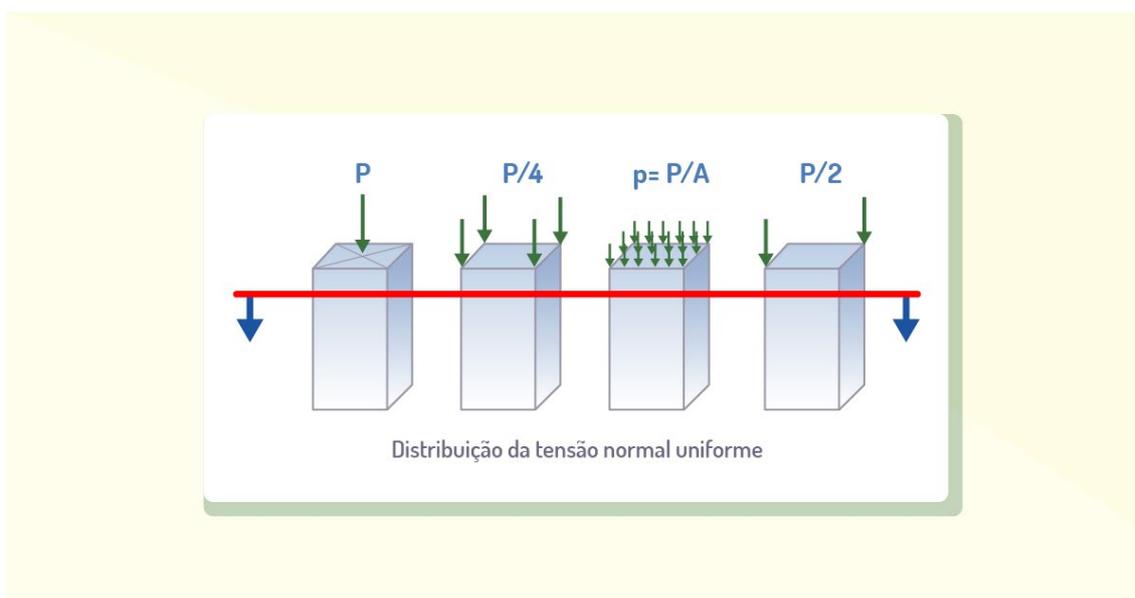


Figura 4.2 - Representação do Princípio de Saint-Venant

Fonte: Adaptada de Massucato *et al.* (2010, p. 3).

Portanto, considerando o princípio de Saint-Venant, percebemos que efeitos concentrados resultantes de qualquer carga atuante no corpo tendem a se dissipar ou se ajustar às regiões distantes dela. As tensões resultantes de qualquer outra carga estaticamente similar aplicada ao corpo de mesma área serão equivalentes à tensão resultante na área distante de aplicação da carga. De modo que não se faz necessário ponderar as distribuições de tensões complexas atuantes nos pontos de aplicação da carga ou apoios, desde que estejam distantes desses pontos.

Deformação Elástica de um Elemento Submetido à Carga Axial

Partindo das definições vistas anteriormente sobre tensão, deformação e lei de Hooke, podemos determinar a deformação elástica de um corpo submetido a cargas axiais a partir do estudo de uma barra com área de seção transversal variável progressivamente ao longo do comprimento L ,

como mostra a Figura 4.3. Aplicando a essa barra uma carga concentrada em suas extremidades e uma carga externa variável por toda extensão longitudinal de seu comprimento, podemos determinar o deslocamento relativo δ (delta) de uma extremidade da barra no que se refere à outra, segundo essa carga. Lembre-se que desprezaremos as deformações concentradas em pontos de carregamento e em seções transversais variáveis, de modo que a deformação ocorrerá uniformemente, distribuindo da mesma forma a tensão normal na seção transversal da barra.

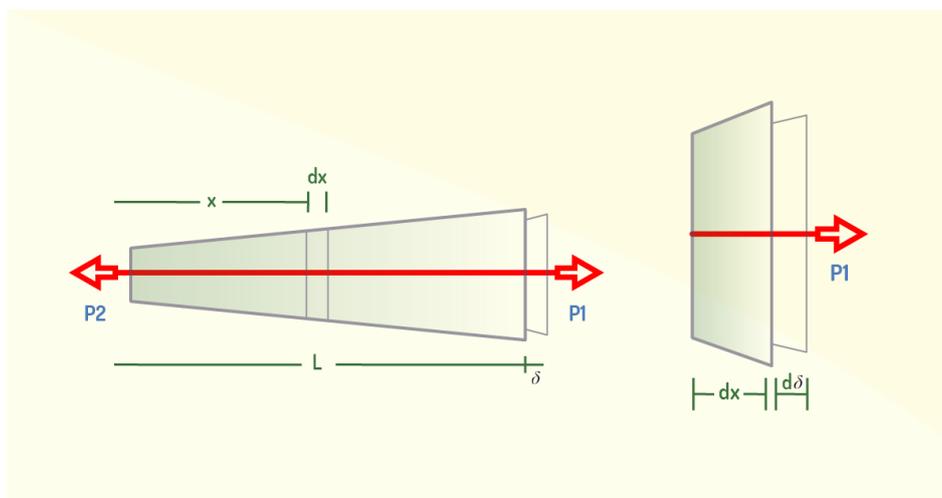


Figura 4.3 - Representação de uma barra com área de seção transversal variável progressivamente ao longo do comprimento L e de seu diagrama de força

Fonte: Adaptada de Hibbeler (2010, p. 86).

Partindo agora do diagrama de força da Figura 4.3 e do método das seções, isolaremos um pequeno elemento da barra com comprimento dx e área de seção transversal $A(x)$ em uma posição x . De modo que a força axial interna resultante será $P(x)$, variável ao longo do comprimento da barra, de modo que cause deformação no elemento escolhido, cujo deslocamento será $d\delta$.

Lembrando que tensão $\sigma = \frac{P(x)}{A(x)}$, a deformação é $\varepsilon = \frac{d\delta}{dx}$ nesse elemento, então poderemos aplicar a lei de Hooke vista anteriormente, de modo que $\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{P(x)}{A(x)} = E \left(\frac{d\delta}{dx} \right) \Rightarrow d\delta = \frac{P(x)dx}{A(x)E}$.

Para o comprimento total da barra L , devemos integrar essa expressão para determinar o deslocamento da extremidade exigido de modo que $\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E} \Rightarrow \delta = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)}$, em que δ é o deslocamento de um ponto na barra relativo a outro; L , a distância original entre os pontos; $P(x)$, a força axial interna na seção, localizada a distância x de uma extremidade; $A(x)$, a área da seção transversal da barra, expressa em função de x ; e E , o módulo de elasticidade para o material.

Para o caso de uma carga constante, teremos que, se a força externa, aplicada a cada extremidade da barra, também for constante, podemos dizer que em todo o comprimento da barra essa força interna P também será constante; assim, chegamos à conclusão de que $\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E} = \frac{PL}{AE}$.

Essa equação poderá ser aplicada se:

- cada fração da barra for constante;
- sobre a barra atuarem distintas e diversas forças axiais;
- houver mudança no módulo de elasticidade de uma região da barra a outra;
- houver mudança nas áreas de seção transversal da barra.

Para todos esses casos, teremos que o deslocamento de uma extremidade da barra em relação à outra será determinado pela adição de deslocamentos das extremidades de cada segmento, ou seja, $\delta = \sum \frac{PL}{AE}$, sendo convencional adotar sinal positivo, para o caso da força axial interna e deslocamento de uma extremidade em relação à outra acarretarem em tração e alongamento; e sinal negativo, para o caso de acarretarem compressão e contração (HIBBELER, 2010).

Princípio de Superposição

Em alguns casos, determinar a tensão ou o deslocamento pontual de um corpo sujeito a um carregamento complexo não é uma tarefa trivial, sendo necessária a subdivisão das cargas em elementos distintos para que seja possível determinar tensão ou deslocamento provocados pela carga em questão, cuja componente individual atuará separadamente sobre o corpo. A essa suposição, damos o nome de princípio da superposição. Perceberemos que a tensão ou o deslocamento resultante serão determinados a partir da somatória das contribuições das componentes individuais. E, para que isso seja verdadeiro, é preciso que:

- a carga seja linearmente relacionada ou à tensão ou ao deslocamento a ser determinado;
- não haja variação configurativa ou geométrica do elemento, pois acarretaria mudança da direção e da localização das forças aplicadas e seus braços de momento, interferindo nos resultados das equações de equilíbrio

Elemento com Carga Axial Estaticamente Indeterminado

Suponhamos uma barra fixa em uma de suas extremidades sob ação de uma carga axial, para que seja possível a determinação da reação de apoio fixo, é preciso e suficiente que a equação de equilíbrio da força aplicada ao longo do eixo da barra seja conhecida e estritamente possível de se determinar. Temos aqui um exemplo de uma barra estaticamente determinada, será a partir dela que discutiremos a condição para que ela seja indeterminada.

Suponhamos agora que a barra se encontra fixa em suas duas extremidades, nesse momento, é possível perceber que haverá sobre ela, duas reações axiais inéditas, de modo que teremos $\uparrow \Sigma F = 0$ como equação de equilíbrio da força, o que nos permite chegar a $F_B + F_A - P = 0$, ou seja, um sistema insuficiente para sua solução, portanto uma barra estaticamente indeterminada.

Para ser solúvel esse problema, deve contar com uma condição de compatibilidade ou cinemática, a qual tem origem na geometria da deformação, ou seja, uma outra equação que especifique as condições do deslocamento.

Uma condição usual de compatibilidade é considerar o deslocamento relativo de uma extremidade da barra em relação à outra, nulo, visto que os apoios das extremidades são fixos. Assim, temos $\delta_{A/B} = 0$, a qual pode ser expressa em termos das cargas aplicadas, caso usemos a relação carga-deslocamento, dependente do material.

Método de Análise de Força para Elementos Carregados Axialmente

Além da condição de compatibilidade, é possível resolver um problema estaticamente indeterminado a partir do método da flexibilidade ou métodos das forças, o qual permite escrever a equação de compatibilidade com a superposição das forças. Vamos supor novamente uma barra fixa nas duas extremidades, de modo que, para escrevermos a equação de compatibilidade, temos que:

1. retirar o efeito de um dos apoios da barra, o qual julgarmos redundante, ou seja, aquele que não é necessário para manter o equilíbrio estável da barra. Feito isso, a barra torna-se estaticamente determinada.
2. seguir o princípio da superposição, o qual nos diz que a barra estará sujeita à carga externa P somada à barra submetida à carga redundante desconhecida F_b .
3. deslocar uma quantidade δ_p a partir do movimento da carga B para baixo a partir da carga P , de modo que também desloque δ_B a partir da reação F_B , ou seja, do movimento da extremidade B da barra para cima. Assim, B não sofrerá deslocamento quando as duas cargas estiverem sobrepostas.

4. encontrar a equação de compatibilidade dos deslocamentos do ponto B, $0 = \delta_p - \delta_B$, admitindo tais deslocamentos como sendo positivo para baixo.
5. aplicar a relação carga-deslocamento a cada caso, admitindo $\delta_p = PL_{AC}/AE$ e $\delta_B = F_B L/AE$, de modo que $0 = \frac{PL_{AC}}{AE} - \frac{F_B L}{AE}$ ou, ainda, $F_B = P \left(\frac{L_{AC}}{L} \right)$.
6. montar o diagrama de corpo livre da barra de modo que seja possível determinar a reação em A a partir da equação de equilíbrio $+\uparrow \Sigma F_y = 0$, a fim de chegarmos a $P \left(\frac{L_{AC}}{L} \right) + F_A - P = 0$. Fazendo $L_{CB} = L - L_{AC}$, teremos $F_A = P \left(\frac{L_{CB}}{L} \right)$.

Percebemos que os resultados obtidos são similares aos obtidos conforme já vimos anteriormente, diferenciando-se dele apenas na aplicação da condição de compatibilidade e, depois, na da condição de equilíbrio. Além disso, é possível perceber a aplicabilidade do princípio da superposição nesse caso, pois deslocamento e carga são relacionados linearmente, indicando comportamento linear-elástico do material em questão (ONOUYE, 2015).

Tensão Térmica

Em geral, a alteração na temperatura de um material gera mudanças em suas dimensões, de forma que para um aumento da temperatura haja expansão do material, enquanto para uma diminuição da temperatura haja contração dele. Vale lembrar que a variação de temperatura está linearmente relacionada à contração do material.

Para um material homogêneo e isotrópico (propriedades físicas constantes), é possível a determinação da deformação de um elemento com comprimento L , experimentalmente a partir de $\delta_T = \alpha \Delta T L$, em que α é o coeficiente linear de expansão térmica; ΔT é a variação de temperatura; L o comprimento inicial do elemento, δT a variação no comprimento do elemento.

Caso α ou a variação de temperatura ocorra em todo o comprimento do elemento ($\Delta T = \Delta T(x)$), teremos que $\delta_T = \int_0^L \alpha \Delta T dx$ como resultado da $\delta_T = \alpha \Delta T L$ aplicada em cada segmento do comprimento.

Percebemos que a mudança no comprimento de um elemento estaticamente determinado pode ser calculada também a partir de $\delta_T = \alpha \Delta T L$, pois tal elemento encontra-se livre para contrair ou expandir diante da ΔT , o que não ocorre para os casos de elementos estaticamente indeterminados, os quais são limitados pelos apoios, produzindo tensões térmicas significativas no projeto.

Para o caso de uma estrutura não isostática, cuja variação de comprimento provocada pela temperatura seja livre, não surgirão tensões causadas pela variação de temperatura.

Para o caso de uma estrutura hiperestática, a variação de comprimento da barra provocada pela temperatura será bloqueada e aparecerão tensões térmicas. Essas tensões podem chegar a valores muito altos, causando danos à estrutura, como sua ruptura. Por esse motivo, há juntas de dilatação, em estruturas de grande porte, como pontes, para possibilitar a livre movimentação térmica da estrutura.

Para a resolução desse tipo de problema, é possível considerar a reação do apoio como reação redundante e aplicar o princípio da superposição, conforme Figura 4.4.

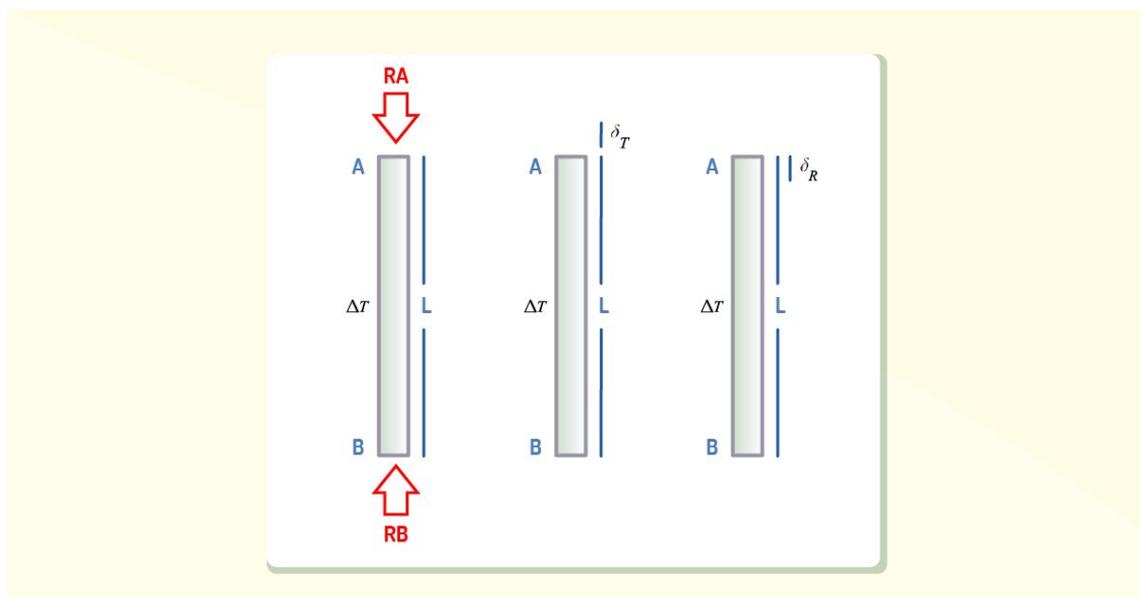


Figura 4.4 - Representação de uma estrutura hiperestática

Fonte: Elaborada pela autora.

Desse modo, teremos que:

- a equação de equilíbrio será dada por $\sum F_y = 0$.

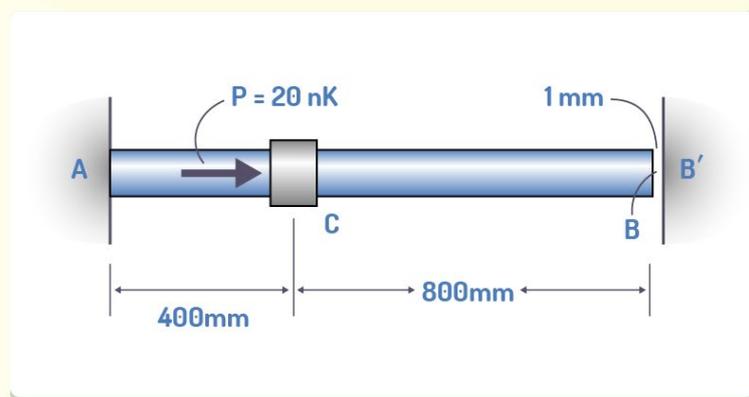
Assim, $R_A - R_B = 0$, ou, ainda, $R_A = R_B$.

- a equação de compatibilidade será dada por $\delta_{AB} = 0$.
- a variação de comprimento provocada pela temperatura será dada por $\delta_T = \alpha \times \Delta T \times L$
- a variação de comprimento provocada reação R_A será dada por $\delta_R = \frac{R_A \times L}{E \times A}$.

- logo, a equação de compatibilidade pode ser escrita como $\delta_{AB} = \delta_T + \delta_R = 0$, a partir da qual chegamos à equação da tensão térmica dada por $\sigma_T = \frac{N}{A} = E \times \alpha \times \Delta T$.

ATIVIDADES

2) Dada uma haste de aço com diâmetro de 5 mm presa a uma parede fixa em seu segmento A, temos que, antes de ser carregada com uma carga específica, esta possui uma folga de 1 mm entre o ponto B'(parede) e ela. Determine as reações em A e B' a partir da descrição anterior para quando a haste for submetida a uma força axial $P = 20 \text{ kN}$. Lembre-se de desprezar o tamanho do colar em C, considere $E_{aço} = 200 \text{ GPa}$.



Fonte: Adaptada de Hibbeler (2010, p. 117).

- A força em A será de $F_A = 18,6 \text{ kN}$.
- A força em B será de $F_B = 3,36 \text{ kN}$.
- A condição de compatibilidade para a haste é $\delta_{AB} = 1 \text{ m}$.
- O equilíbrio da haste será dado por $F_A - F_B - 20 \times 10^3 = 0$.
- A força em A será de $16,6 \text{ N}$.

Torção

Agora, consideraremos um eixo ou um tubo, ou seja, um elemento linear longo, cuja seção transversal é circular, de modo que estudaremos os efeitos da aplicação de esforços torcionais sobre ele.

Deformação por Torção de um Eixo Circular

Quando um material sofre uma torcedura em torno de seu eixo longitudinal, dizemos que houve um torque nesse material. Suponhamos que um torque seja aplicado a um eixo cujo material seja borrachoso, ou seja, altamente deformável. Imaginemos que a esse eixo cilíndrico faremos diversos cortes: na horizontal, formando discos; e na vertical, formando uma grelha, conforme Figura 4.5.

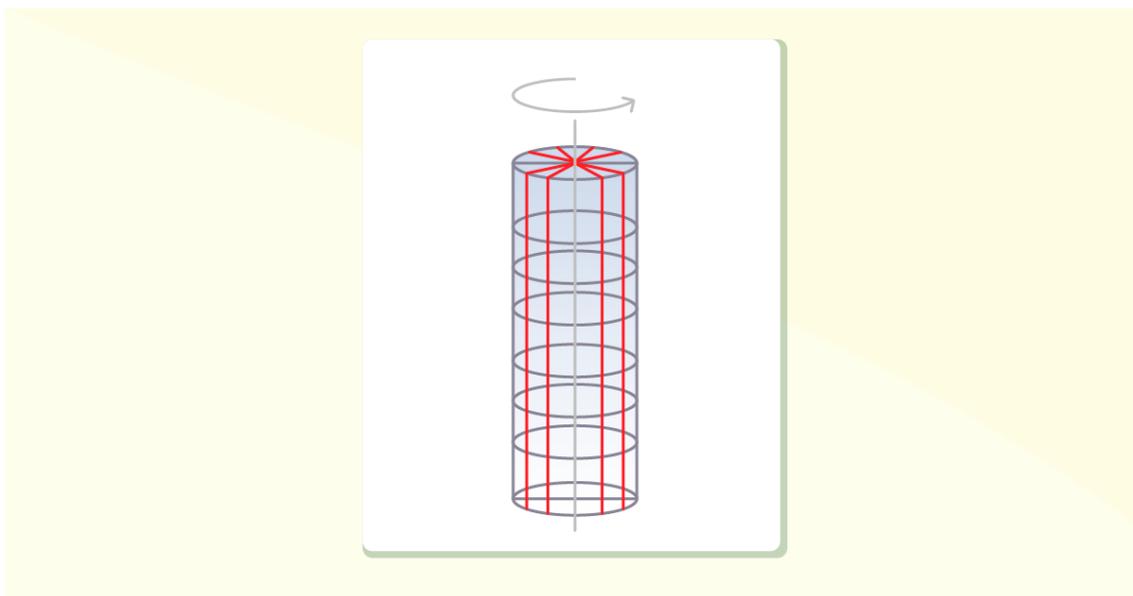


Figura 4.5 - Representação do cilindro borrachoso com diversos cortes

Fonte: Elaborada pela autora.

Em reação ao torque:

- os discos e as seções transversais localizadas nas extremidades do eixo não se alteram, ou seja, os discos como círculos e as seções, planas e retas, sem expansão e contração.
- as grelhas começam a se movimentar, ou seja, há alteração no seu padrão, de modo que a reta longitudinal sofre deformação, tornando-se uma hélice que interceptará os círculos, sem alterar a angulação entre eles, de acordo com Figura 4.6.

- caso o ângulo de rotação seja diminuto, teremos que tanto comprimento quanto raio do eixo não sofrerão alterações.

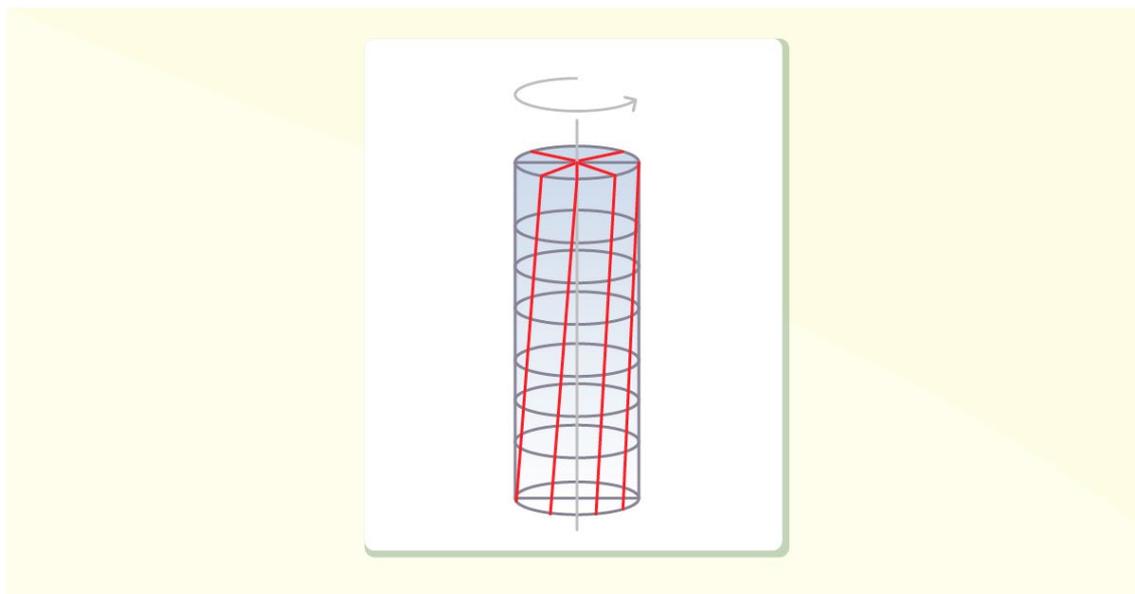


Figura 4.6 - Representação do cilindro borrachoso sob torção

Fonte: Elaborada pela autora.

Para o caso de usarmos o mesmo eixo citado anteriormente, mas agora prendendo uma de suas extremidades, teremos que, ao aplicarmos um torque à extremidade livre, o plano desse será distorcido e se manifestará em uma forma oblíqua, formando ângulo agudo. Perceberemos que uma linha radial presente na seção transversal a uma distância x da extremidade fixa do eixo terá rotação com angulação $\Phi(x)$, ou seja, ângulo de torção, o qual é dependente da posição x e variável longitudinalmente.

Nesse momento, se isolarmos um pequeno elemento a uma distância radial σ do eixo central, veremos que as faces desse elemento sofrerão rotação devido à deformação. Nessa conformação, teremos que a face posterior rotacionará por $\Phi(x)$ e a face anterior por $\Phi(x) + \Delta\Phi$, resultando em uma deformação por cisalhamento do elemento, quando tivermos a diferença entre as rotações

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{C \rightarrow A \text{ along } CA \\ B \rightarrow A \text{ along } BA}} \theta'$$

$\Delta\Phi$, a qual pode ser calculada a partir de $\lim_{\substack{C \rightarrow A \text{ along } CA \\ B \rightarrow A \text{ along } BA}} \theta'$, em que γ é relacionado ao Δx e à $\Delta\Phi$. AC e AB são bordas do cilindro inicial, cuja angulação entre elas era de 90° , e após a deformação, as bordas do elemento são AD e AC, cuja angulação é Θ' .

Ao admitirmos $\Delta x \rightarrow dx$ e $\Delta \Phi \rightarrow d\Phi$, teremos que $BD = \rho d\phi = dx\gamma$, logo $\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$. Aqui, percebemos que dx e $d\Phi$ são os mesmos em todos os elementos da seção transversal, de modo que a razão entre eles é constante, indicando que a intensidade da deformação por cisalhamento de qualquer um desses elementos variará com a distância radial ρ que parte da linha central do eixo. Ou, ainda, podemos afirmar que a deformação por cisalhamento no interior do eixo é variável linearmente ao longo da reta radial, de zero na linha central do eixo a um máximo $\gamma_{\text{máx}}$ em seu limite externo, resultando em $\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right)\gamma_{\text{máx}}$, desde que $\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{\text{máx}}}{c}$ (HIBBELER, 2010).

A Fórmula da Torção

A quantidade de rotação ou torção é limitante em um projeto de eixos quando esses estão submetidos a torques, sendo necessário o conhecimento do ângulo de torção para que seja possível analisar as reações em eixos estaticamente indeterminados.

Quando um eixo fica submetido a um torque externo, há um torque também interno no interior do eixo, sendo possível e necessário relacioná-lo à distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal do eixo ou tubo circular.

Supondo novamente que o elemento seja formado por material linear e elástico, podemos:

- aplicar a Lei de Hooke $\tau = G\gamma$, em que τ varia de zero a um valor máximo, de uma linha de centro longitudinal ao seu limite externo.
- observar uma variação linear na tensão de cisalhamento, decorrente da deformação por cisalhamento ao longo de qualquer segmento radial da seção transversal.
- calcular a partir de $\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{\text{máx}}$ a distribuição cisalhamento-tensão, tal qual uma função da posição radial ρ do elemento. Ou, ainda, definir a distribuição da tensão na seção transversal em termos da geometria do eixo, satisfazendo a condição para que o torque produzido pela distribuição de tensão ao longo da seção transversal seja correspondente ao torque interno e resultante T na seção, o qual manterá o eixo em equilíbrio.

Nessa conformidade, temos:

- que cada elemento de área dA , localizado em ρ , está submetido a uma força $dF = \tau dA$, produzindo um torque $dT = \rho(\tau dA)$, no qual, ao ser calculado para toda a seção transversal, como $T = \int_A \rho(\tau dA) = \int_A \rho \left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{\text{máx}} dA$, em que $\frac{\tau_{\text{máx}}}{c}$ é constante, T pode ser calculado como sendo $T = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c} \int_A \rho^2 dA$.

- a integral vista é dependente da geometria do eixo e representa o momento de inércia polar (J) da área de seção transversal, quando calculado em torno da linha de centro longitudinal do eixo.
- ou, ainda, $\tau_{máx} = \frac{Tc}{J}$, na qual $\tau_{máx}$ é a tensão de cisalhamento máxima no eixo ocorrida na superfície externa; T é o torque interno resultante e atuante na seção transversal (seu valor pode ser obtido por meio do método de seções e pela equação do momento de equilíbrio aplicada em torno da linhas de centro longitudinal do eixo); J é o momento de inércia polar da área de seção transversal; c é o raio externo do eixo.
- para o caso de uma distância intermediária ρ , podemos calcular a tensão de cisalhamento como $\tau = \frac{T\rho}{J}$.

Vale lembrar que, até aqui, o cálculo da tensão é feito para material homogêneo e cujo eixo é circular, indicando que a tensão de cisalhamento é proporcional à deformação de cisalhamento.

Para o caso de um eixo sólido, teremos que:

- O momento de inércia polar J será calculado tendo em vista um elemento de área de um anel infinitesimal, cuja espessura é dada por dp e a circunferência é dada por 2π , de modo

$$\text{que } dA=2\pi\rho dp: J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 (2\pi\rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho = 2\pi \left(\frac{1}{4}\right) \rho^4$$

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 (2\pi\rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho = 2\pi \left(\frac{1}{4}\right) \rho^4 \Big|_0^c \quad \text{ou, ainda,}$$

$J = \frac{\pi}{2} c^4$, em que J é sempre positivo e é uma propriedade geométrica da área.

- A partir de $J = \frac{\pi}{2} c^4$, podemos concluir que:
 - a tensão de cisalhamento varia linear e longitudinalmente em cada reta radial da seção transversal do eixo. Porém, se um elemento de volume desse material for isolado, as tensões de cisalhamento atuarão sobre as 4 de suas faces adjacentes, pois é possível aplicar a propriedade complementar do cisalhamento.
 - o torque interno T tem sua tensão de cisalhamento distribuída em duas direções: ao longo de retas radiais no plano da área de seção transversal e ao longo do plano axial. Para os casos de eixos feitos de madeiras, temos que, devido à distribuição axial da tensão de cisalhamento, há tendência a rachar ao longo do plano axial quando submetidos a torque excessivo, pois a madeira é um material anisotrópico, ou seja, sua resistência ao cisalhamento na direção do centro do eixo é muito menor do que a resistência no sentido perpendicular às fibras.

Para o caso de um eixo tubular (eixo vazado), teremos que:

- o momento de inércia polar será dado por $J = \frac{\pi}{2}(c_e^4 - c_i^4)$, em que c_e é raio externo e c_i é raio interno do eixo tubular.
- a tensão de cisalhamento dissipada sobre a área da seção transversal varia linearmente ao longo de qualquer reta radial, e a tensão de cisalhamento varia ao longo do plano axial, assim como para o eixo maciço.

Transmissão de Potência

Elementos com seção transversal circular, como tubos e eixos, transmitem potência gerada por máquinas, de modo que, submetidos a torques, dependem dessa potência e da velocidade angular do eixo.

Dado que a potência é a razão entre trabalho realizado e tempo, e o trabalho transmitido por um eixo rotativo é o produto entre o torque aplicado e ângulo de rotação, podemos entender que, para um pequeno diferencial de tempo, o torque T fará o eixo rotacionar em $d\Theta$, então, teremos que a potência, a qual chamaremos de instantânea, será dada por $P = T d\Theta/dt$, na qual, se considerarmos $\omega = d\Theta/dt$, medido em rad/s, teremos $P = T\omega$, expressa em watts, de modo que $1W = 1Nm/s$.

Além da potência e do torque em uma máquina, outra grandeza essencial é a frequência de rotação de um eixo, dada por f , a qual representa o número de ciclos ou revoluções que o eixo realiza por segundo, no qual 1 ciclo corresponde a 2π rad, sendo possível reescrever ω como sendo $\omega = 2\pi f$ e P como $P = 2\pi f T$.

Quando pensamos em termos do projeto de um eixo, saber a potência transmitida por ele e sua frequência é essencial para determinarmos o torque desenvolvido por ele. Sabendo, então, o torque e a tensão de cisalhamento suportável pelo material, τ_{adm} , é possível conhecermos a área da seção transversal, sob a condição de que esse material seja linear-elástico, em que o projeto ou parâmetro geométrico (J/c) é dado por $\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{adm}}$.

A partir da relação J/c , podemos compreender e calcular o único valor do raio para um eixo maciço: $J = \left(\frac{\pi}{2}\right) c^4$. Para o caso de um eixo tubular, o projeto pode considerar diversas maneiras de ser empregado, pois é possível escolher arbitrariamente tanto c_o como c_i , chegando à equação $J = \left(\frac{\pi}{2}\right) (c_o^4 - c_i^4)$.

Ângulo de Torção

Sabemos que o projeto de um eixo é dependente da quantidade de rotação ou torção ocorridos ao eixo sob torque, além de sabermos o ângulo de torção (Φ), é extremamente importante que saibamos analisar as reações em eixos estaticamente indeterminados. Para isso, vamos supor que:

- o eixo deve ter seção transversal circular e variável ao longo de seu comprimento;
- o material deve ser homogêneo e possuir um comportamento linear-elástico sob torque;
- as deformações localizadas nos pontos de aplicação dos torques e o local de mudança repentina em suas dimensões devem ser ignorados, assim como para o caso da barra com carga axial;
- partindo do princípio de Saint-Venant, teremos que as deformações e as mudanças de dimensões ocorrerão dentro de pequenas regiões do comprimento do eixo, não influenciando o resultado final;
- a partir do método das seções, é possível atribuir a um disco infinitesimal de espessura dx e posição x um torque, o qual gerará uma rotação relativa de uma de suas faces em relação à outra, $d\Phi = \gamma dx / \rho$;
- aplicando a lei de Hooke e considerando que a tensão de cisalhamento pode ser expressa em termos do torque, chegaremos à equação $d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G} dx$, que descreve o ângulo de torção do disco;
- integrando em todo o comprimento L do eixo, chegamos à $\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{J(x)G}$, na qual Φ é o ângulo de torção de uma extremidade do eixo à outra, dado em radianos; $T(x)$ é o torque interno na posição x , o qual foi encontrado a partir do método das seções e equação do momento (no equilíbrio, cuja condição foi aplicada em torno da linha central do eixo); $J(x)$ é o momento de inércia polar do eixo (função da posição x); G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento do material;
- quando o material é homogêneo, temos que G , área de seção transversal e torque são constantes ao longo do comprimento do eixo, de modo que $\phi = \frac{TL}{JG}$;
- se diferentes e diversos torques atuarem sobre o eixo ou houver mudança tanto na área de seção transversal quanto no módulo ao cisalhamento, teremos que $\phi = \frac{TL}{JG}$ poderá ser aplicada a cada segmento do eixo, de modo que sejam constantes;

- o ângulo de torção será calculado a partir da somatória de todos os vetores dos ângulos de torção de cada segmento, de uma extremidade a outra do eixo, por meio de $\phi = \sum \frac{TL}{JG}$,
- convencionalmente, teremos que o sentido e a direção do torque aplicado serão definidos a partir da regra da mão direita, conforme Figura 4.7.

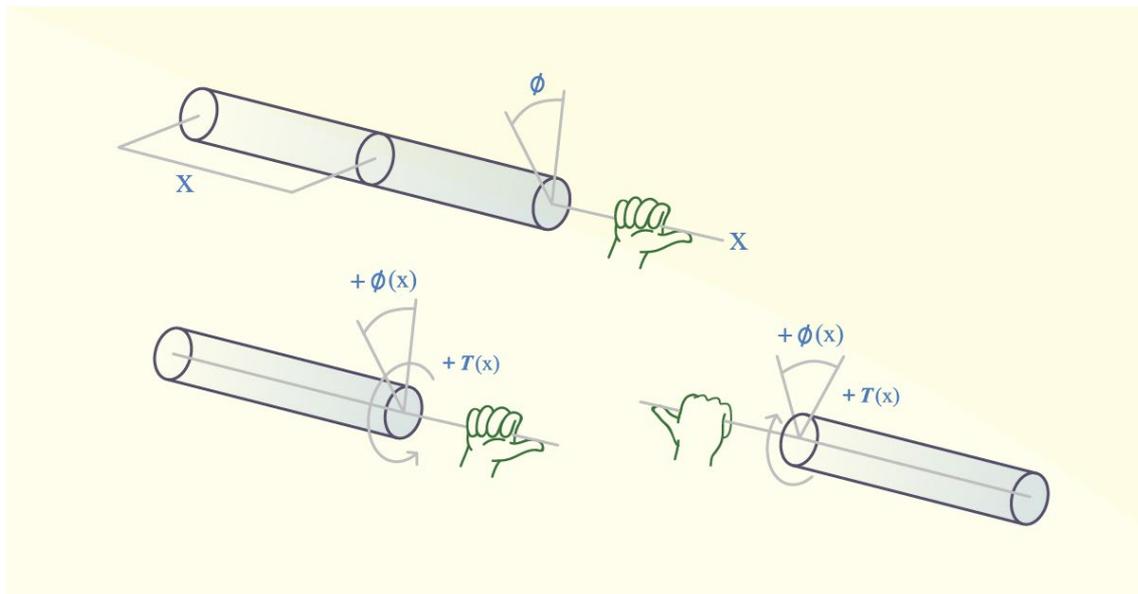


Figura 4.7 - Representação da regra de mão direita para convenção de sinal para os valores de torque e ângulo de torção

Fonte: Adaptada de Hibbeler (2010, p. 156).

Assim, torque e ângulo de torção terão valores positivos se a direção indicada pelo polegar tiver o sentido de afastamento do eixo (BOTELHO, 1998).

Elementos Estaticamente Indeterminados Carregados com Torque

Um eixo carregado por torque será considerado estaticamente indeterminado quando a equação do momento na condição de equilíbrio em torno de sua linha central não for suficiente para determinar os torques desconhecidos atuantes sobre ela.

A partir do diagrama de corpos livre, para a situação descrita anteriormente, podemos encontrar $\sum M_x = 0$ e $T - T_A - T_B = 0$, a partir da qual percebemos que o número de incógnitas é maior do que o número de equações, corroborando com a indeterminação estática do sistema.

Para que seja possível, devemos considerar que a condição cinemática ou condição de compatibilidade necessárias requerem que o ângulo de torção de uma extremidade até a outra seja nulo, já que os pontos de apoio das extremidades se encontram fixos, logo, $\phi_{A/B} = 0$. E mais, supondo que o material mantenha o comportamento linear-elástico, em que $\phi = \frac{TL}{JG}$, teremos em termos dos torques desconhecidos que $\frac{T_A L_{AC}}{JG} - \frac{T_B L_{BC}}{JG} = 0$.

Supondo que JG seja constante e $L = L_{AC} + L_{BC}$, teremos que $T_A = T \left(\frac{L_{BC}}{L} \right)$ e $T_B = T \left(\frac{L_{AC}}{L} \right)$, os quais aumentarão ou diminuirão linearmente de acordo com a localização de L_{AC} e L_{BC} .

ATIVIDADES

3) Elementos com seção transversal circular, como tubos e eixos, transmitem potência gerada por máquinas, de modo que, submetidos a torques, dependem dessa potência e da velocidade angular do eixo. Sabendo que um eixo tubular de diâmetro interno de 30mm e diâmetro externo de 42 mm é usado para transmitir 90kW de potência, assinale a alternativa correta, sabendo que a tensão de cisalhamento não excede 50 MPa.

- a) O momento de inércia J terá valor de $3,29 \times 10^{-6} \text{ m}^4$.
- b) O Torque T terá valor de 538 Nm.
- c) O momento de inércia será nulo.
- d) A frequência de rotação terá valor de 27,7 Hz.
- e) O valor do torque será 540 Nm.

Flexão e Cisalhamento Transversal

Discutiremos as deformações que ocorrem em uma viga prismática feita de material homogêneo e borrachoso, submetida a uma flexão.

Deformação por Flexão de um Elemento Reto

Faremos um exemplo similar ao analisado no tópico de “Deformação por torção de um eixo circular”, de modo que particionaremos a viga, como mostrado na Figura 4.8, e aplicaremos nela um momento fletor, que tenderá a distorcer as retas longitudinais, tornando-as curvas, e as retas transversais permanecerão retas, porém rotacionadas.

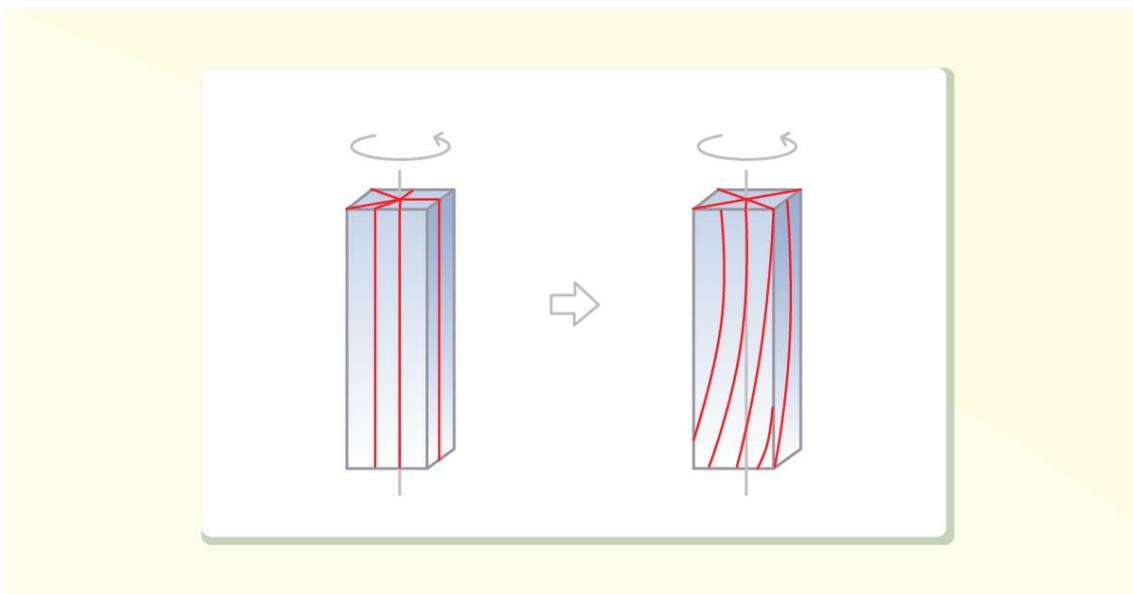


Figura 4.8 - Representação do elemento reto (viga) sob momento fletor

Fonte: Elaborado pela autora.

O comportamento da barra ao ser deformada, devido ao momento fletor, permite que a parte superior da barra fique comprimida, enquanto a parte inferior estica-se, mudando o padrão, como descrito na Figura 4.9. Em contrapartida, entre essas duas regiões há uma superfície, chamada neutra, na qual as fibras longitudinais do material não se alteram no comprimento.

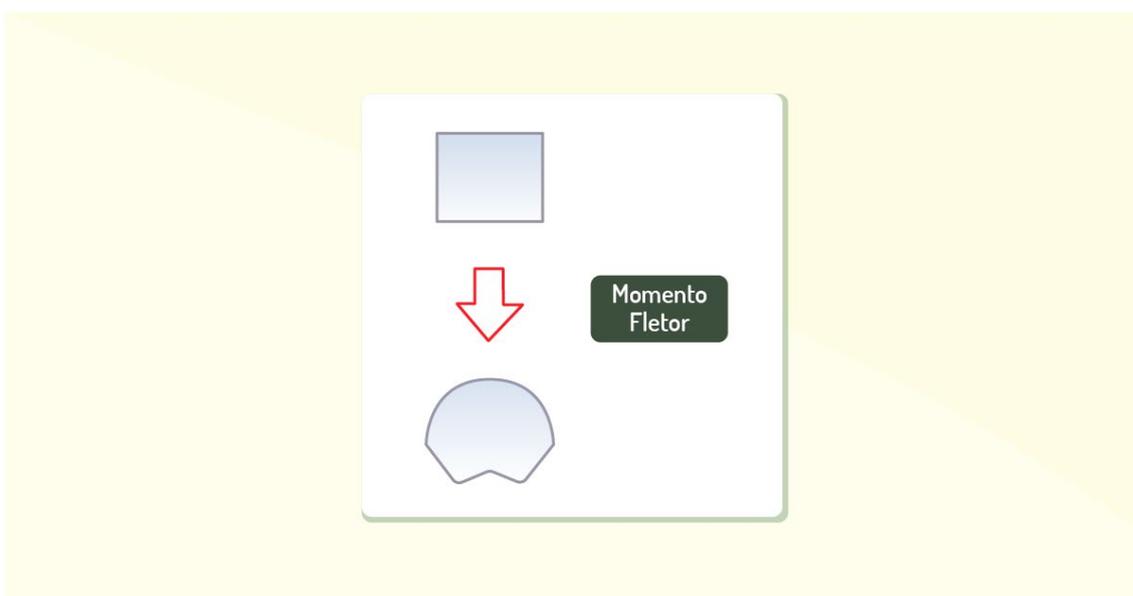


Figura 4.9 - Representação da mudança de padrão superficial devido à ação do momento fletor

Fonte: Elaborada pela autora.

A partir disso, podemos supor sobre o modo de deformação do material em resposta à tensão:

- O eixo longitudinal x localizado na superfície neutra não sofrerá alteração de comprimento. Nesse caso, o momento tenderá a deformar a viga de modo que a reta se tornará uma curva localizada no plano de simetria x - y .
- As seções transversais da viga permanecerão planas e perpendiculares ao eixo longitudinal durante a deformação.
- Qualquer deformação da seção transversal em seu próprio plano não será relevante, especialmente no eixo z , localizado no plano da seção transversal com e em torno do qual ela gira, chamado de eixo neutro.

A fim de corroborar com as hipóteses, admitiremos um pequeno elemento da viga, localizado a uma distância x e de espessura Δx , a partir do qual podemos observar que, quando localizado na superfície neutra da viga, não tem seu comprimento alterado. Por outro lado, quando um elemento é localizado em y , o qual chamaremos de ΔS , teremos que, diante da deformação, ΔS contrair-se-á, de modo que $\epsilon = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S' - \Delta S}{\Delta S}$. Em que, para $\Delta S = \Delta x = \rho \Delta \Theta$ e $\Delta S' = (\rho - y) \Delta \Theta$, teremos $\epsilon = -\frac{y}{\rho}$. O que nos permite concluir que para qualquer seção transversal específica, a deformação normal longitudinal variará linearmente com y a partir do eixo neutro.

A deformação máxima, $\epsilon_{máx}$, ocorrerá na fibra externa da viga, localizada a uma distância c do eixo neutro, de modo que $\frac{\epsilon}{\epsilon_{máx}} = \frac{-y}{c}$ ou $\epsilon = -\left(\frac{y}{c}\right) \epsilon_{máx}$ (HIBBLER, 2010).

Fórmula da Flexão

Agora, tentaremos relacionar a distribuição da tensão longitudinal de uma viga ao momento fletor resultante interno que atua sobre ela em sua seção transversal. Supondo novamente um material que se comporta de maneira linear-elástica, temos que a ele é aplicável a lei de Hooke e também haverá uma variação linear da deformação normal, a qual é consequência da variação linear da tensão, de modo que podemos calcular a tensão sobre a área da seção transversal a partir da equação, $\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right) \sigma_{máx}$.

Para o caso do momento fletor positivo atuante na direção z^+ , teremos que os valores positivos de y resultarão em valores negativos para σ , decorridos a uma tensão de compressão, já que essa atua na direção negativa de x . Concomitantemente, teremos que os valores negativos de y resultarão em valores positivos ou de tração para cima.

Ao selecionarmos um elemento de volume desse material em um ponto específico de sua seção transversal, observaremos que apenas as tensões normais de tração ou compressão atuarão sobre ele. E saberemos sua localização no eixo neutro da seção transversal respeitando a condição de que a força resultante produzida pela distribuição dessa tensão sobre a seção transversal é igual a zero, de modo que a encontraremos a partir da força resultante, dada pela somatória das forças em x: $FR = \sum F_x$, daí teremos que $0 = \int_A dF = \int_A \sigma dA = \int_A -\left(\frac{y}{c}\right) \sigma_{m\acute{a}x} dA = \frac{-\sigma_{m\acute{a}x}}{c} \int_A y dA$, em que $dF = \sigma dA$ e $\sigma_{m\acute{a}x}/c$, logo $\int_A y dA = 0$.

A equação anterior nos mostra que o primeiro momento da área de seção transversal do elemento precisa ser nulo. Essa condição só será satisfatória se o eixo neutro for coincidente ao eixo horizontal de simetria da seção transversal, de modo que momento de dF em torno do eixo neutro será dado por $dM = y dF$, o qual é positivo, visto que o polegar está direcionado ao sentido positivo do eixo Z, como visto na regra da mão direita. O que nos permite chegar à equação $M = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{c} \int_A y^2 dA$.

Essa integral representará o momento de inércia da área de seção transversal calculada em torno do eixo neutro, a qual, em termos de $\sigma_{m\acute{a}x}$, pode ser escrita como $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{Mc}{I}$, em que $\sigma_{m\acute{a}x}$ é a tensão normal máxima no elemento localizada no ponto da área da seção transversal mais afastada do eixo neutro; M é o momento interno resultante obtido a partir do método das seções e das equações de equilíbrio, calculado em torno do eixo neutro da seção transversal; I é o momento de inércia da área de seção transversal em torno do eixo dado por $I = \frac{1}{12}bh^3$; c é a distância perpendicular do eixo neutro ao ponto mais longínquo desse eixo, na qual a máxima atua.

Lembrando que $\frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{c} = -\frac{\sigma}{y}$, temos que tensão normal na distância intermediária y pode ser determinada por $\sigma = -\frac{My}{I}$, a partir da qual podemos observar que o sinal negativo é extremamente necessário para corroborar com o estabelecido para os eixos x, y e z; de modo que, pela regra da mão direita, teremos M positivo ao longo do eixo z+; y positivo para cima, e σ negativo devido à compressão atuante na direção negativa de x.

Tanto $\sigma_{máx} = -\frac{Mc}{I}$ quanto $\sigma = -\frac{My}{I}$ nos dizem respeito da fórmula de flexão, usada para determinar a tensão normal em um membro reto cuja seção transversal é simétrica em relação ao eixo e no qual o momento seja aplicado no sentido perpendicular a ele. Além de ser aplicada a seções retas, a fórmula da flexão pode ser usada na maioria dos projetos de engenharia para determinar, também, a tensão normal nos membros que tenham pequena conicidade.

Cisalhamento em Elementos Retos

Percebemos que as vigas, em geral, suportam tanto cargas de cisalhamento quanto de momento fletor, de modo que o cisalhamento é o resultado de uma distribuição de tensão de cisalhamento transversal, o qual atua sobre a seção transversal da viga. As tensões de cisalhamento longitudinais associadas à propriedade complementar de cisalhamento também atuam ao longo dos planos longitudinais da viga.

Mais uma vez, usaremos como exemplo um elemento típico retirado do interior da seção transversal, o qual estará sujeito a tensões de cisalhamento transversais e longitudinais.

Resultante da tensão de cisalhamento, temos que haverá deformações de cisalhamento no elemento citado de modo que distorceram a seção transversal de maneira mais complexa. Para isso, consideraremos uma barra feita de material altamente deformável e marcada como uma grade de linhas horizontais e verticais.

Ao aplicarmos uma força de cisalhamento V nessa barra, verificaremos a deformação das linhas, conforme o padrão mostrado na Figura 4.10, a qual nos indica que a distribuição não uniforme da tensão de cisalhamento sobre essa seção provoca a distorção dela. Em (a), encontram-se tábuas sem acoplamento, e em (b), encontram-se tábuas com acoplamentos.

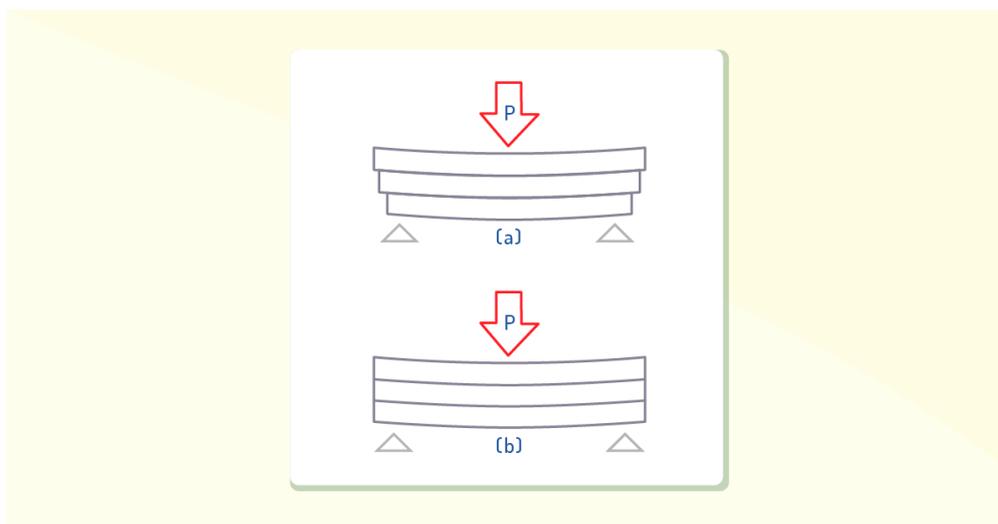


Figura 4.10 - Representação de uma barra sob ação de força cisalhante

Fonte: Elaborada pela autora.

Para desenvolvermos a fórmula de flexão, partimos do pressuposto de que as seções transversais tenham de permanecer planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga mesmo após a deformação. Entretanto, no caso citado anteriormente, essa condição é violada quando a viga está submetida a uma flexão e cisalhamento, o que nos permite supor que a distorção ocorrida na seção transversal é insignificante e pequena, podendo assim ser desprezada. Essa hipótese é utilizada para análise da viga do tipo esbelta, a qual possui uma largura extremamente pequena em relação ao seu comprimento.

Fórmula do Cisalhamento

A relação existente entre a distribuição da tensão de cisalhamento que atua sobre a seção transversal de uma viga e a força cortante ou força de cisalhamento resultante nessa seção é fundamentada no estudo da tensão de cisalhamento longitudinal. Para isso, relacionaremos o equilíbrio da força horizontal de uma parte do elemento retirado da viga, a partir do qual é possível esquematizar o diagrama de corpo livre, que nos mostra somente a distribuição da tensão normal atuante sobre ele, o qual nos diz que a distribuição é resultado dos momentos fletores M e $M + dm$. Por outro lado, o diagrama de corpo livre sobre os efeitos de V não será incluído aqui, pois essas cargas estão sendo aplicadas na vertical. Sendo assim, o elemento descrito satisfará o somatório das forças em x , o qual deve ser nulo, visto que a distribuição de tensão em cada lado forma apenas um conjugado e, portanto, uma força resultante nula, conforme Figura 4.11.

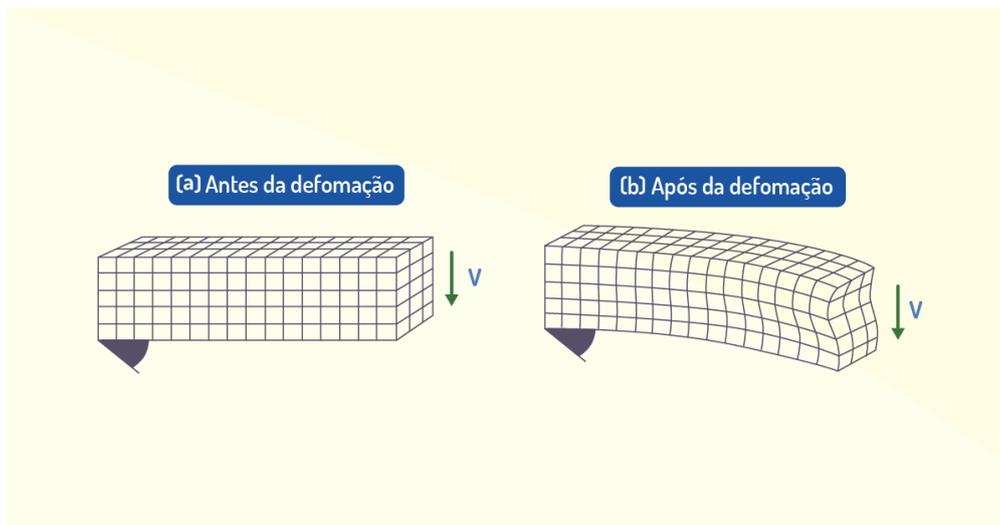


Figura 4.11 - Representação de uma viga sob ação de uma horizontal
 Fonte: Hibbeler (2010, p. 263).

Ao admitir o segmento superior do elemento selecionado a uma distância y' do eixo neutro, cuja largura é t na seção e cada lado dela possui área A' , uma vez que os momentos resultantes de cada lado do elemento diferem por dm , percebemos que o somatório das forças em x não será igual a 0, a menos que a tensão de cisalhamento longitudinal atue sobre a face inferior do segmento. Sendo assim, supomos que essa tensão de cisalhamento será constante em toda a largura t da face inferior e atuante sobre a área $t dx$.

Segundo as equações de equilíbrio das forças horizontais e flexão, teremos que $\int_{A'} \sigma' dA - \int_{A'} \sigma' dA - \tau(t dx) = 0$, logo, em termos de τ , $\tau = \frac{1}{t} \left(\frac{dM}{dx} \right) \int_{A'} y dA$.

Sendo $\underline{y}' = \int_{A'} y dA / A'$, podemos reescrever a equação como $Q = \int_{A'} y dA = \underline{y}' A'$, em que A' é a parte superior ou inferior da área da seção transversal do elemento definido a partir da seção, em que t é medido, e y' é a distância entre o centroide de A' medida a partir do eixo neutro.

Ainda podemos relacionar $\tau = \frac{VQ}{It}$, chamada de fórmula de cisalhamento, em que τ é a tensão de cisalhamento no ponto localizado a uma distância y' do eixo neutro do elemento, a qual é constante e, portanto, média ao longo da largura t do membro; V é a força cortante resultante interna determinada a partir do método das seções e pelas equações de equilíbrio; I é o momento de inércia de toda área da seção transversal em torno do eixo neutro; t é largura da área de seção transversal do elemento no ponto τ .

Vale lembrar que a fórmula do cisalhamento pode ser aplicada igualmente para se determinar a tensão de cisalhamento transversal da área da seção transversal, visto que o cisalhamento transversal e longitudinal tem valores de tensões complementares e numericamente iguais.

A tensão de cisalhamento em elementos compostos, ou seja, nos quais as seções transversais possuem materiais diferentes, também é obtida a partir da fórmula de cisalhamento, sendo necessário calcular Q e I a partir da seção transformada do elemento, em que a largura t da seção transversal se mantém para o ponto τ a ser determinado (SILVA, 2013).

Tensões de Cisalhamento em Vigas

A partir da fórmula do cisalhamento, poderemos estudar as distribuições da tensão de cisalhamento em alguns tipos comuns de seções transversais de vigas. Para uma seção transversal retangular, devemos considerar que a viga possui seção transversal retangular de largura b e altura h , conforme Figura 4.12.

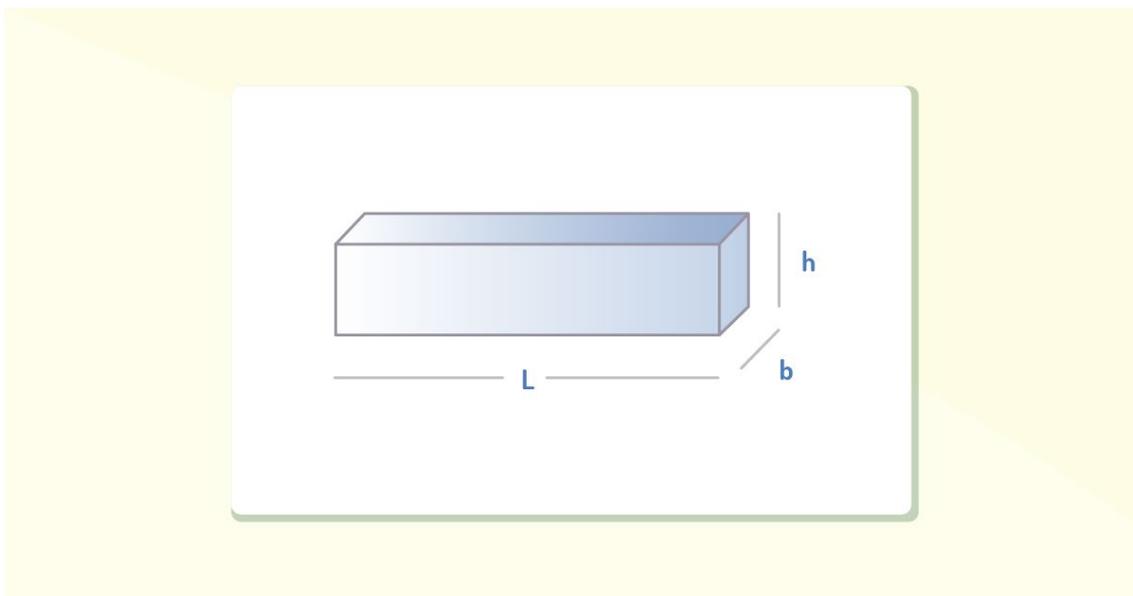


Figura 4.12 - Representação de uma viga cuja seção é transversal retangular

Fonte: Elaborada pela autora.

Percebemos que, ao longo de toda a seção transversal, a distribuição da tensão de cisalhamento, a qual pode ser calculada a partir de uma altura arbitrária y do eixo neutro, será $Q = \bar{y}'A' = \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] \left(\frac{h}{2} - y \right) b = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b$, de modo que, combinada à fórmula do cisalhamento, será dada por $\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V \left(\frac{1}{2} \right) \left[\left(\frac{h^2}{4} \right) - y^2 \right] b}{\left(\frac{1}{12} b h^3 \right) b}$ ou $\tau = \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$.

Essa equação nos indica que a distribuição da tensão de cisalhamento sobre a seção transversal é parabólica, e a intensidade varia de 0 nas partes superior e inferior para $y=h/2$, ao valor máximo no eixo neutro para $y = 0$.

Sabendo que $A=b.h$, teremos que para $y=0$, $\tau_{máx} = 1,5 \frac{V}{A}$. O mesmo poderia ser verificado para a equação $\tau = \frac{VQ}{It}$, pois $\tau_{máx}$ ocorre onde Q tem valor máximo, para área acima ou abaixo do eixo neutro, visto que $A' = bh/2$; $\bar{y} = h/4$; V e I são constantes, comprovando que $\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{V \left(\frac{h}{4} \right) \left(\frac{bh}{2} \right)}{\left[\frac{1}{12} b h^3 \right] b} = 1,5 \frac{V}{A}$.

Percebemos que a $\tau_{máx}$ é 50% maior quando comparada à $\tau_{méd}$, dada por V/A , vista anteriormente.

Além disso, é possível ver que para cada τ atuante sobre a área de seção transversal, haverá um correspondente atuando no sentido longitudinal ao longo da veia de modo que, se essa viga foi cortada por um plano longitudinal através do seu eixo neutro, podemos observar que a tensão de cisalhamento máxima atuará nesse plano formado.

É exatamente essa tensão que provoca a falha de uma viga feita de madeira, por exemplo, como já discutido anteriormente. Quando a distribuição da tensão de cisalhamento é integrada ao domínio da seção transversal, é produzido o cisalhamento resultante V ; de modo que, se escolhermos uma tira infinitesimal de área $dA = bdy$ e τ , na qual atua uniformemente em toda ela, teremos $\int_A \tau dA = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) b dy = \frac{6V}{h^3} \left[\frac{h^2}{4} y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{6V}{h^3} \left[\frac{h^2}{4} \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) \right] = V$

Para o caso de uma viga de abas largas, a qual é formada por 2 abas e uma ‘alma’, de acordo com Figura 4.13, temos que:

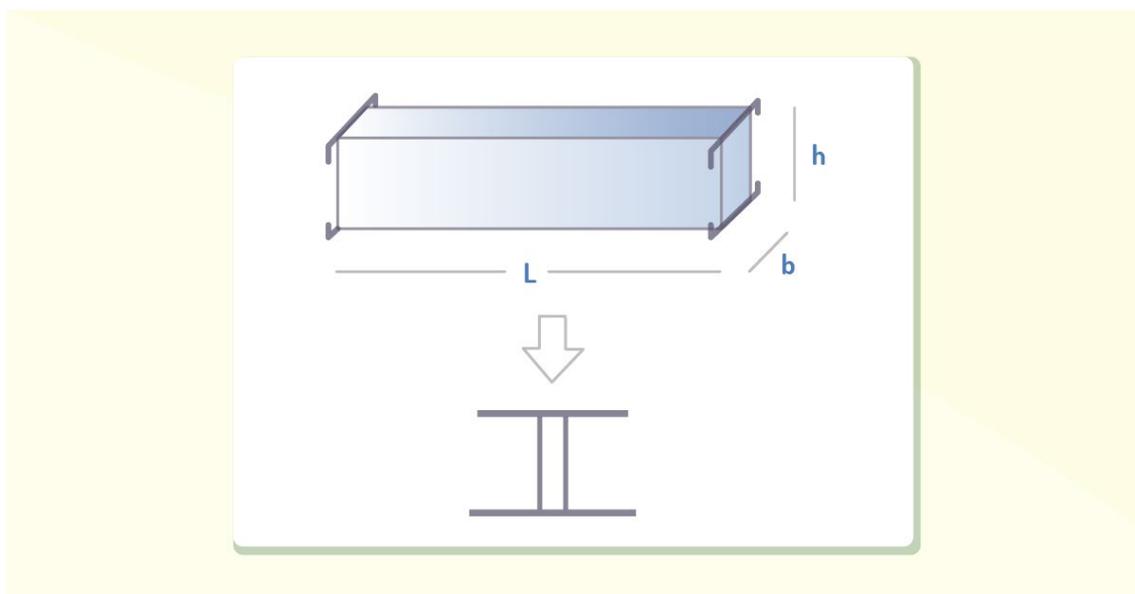


Figura 4.13 - Representação de uma viga de abas largas

Fonte: Elaborada pela autora.

Assim como no exemplo anterior, determinaremos a distribuição da tensão de cisalhamento que atua sobre a seção transversal de uma viga a partir de sua seção retangular e tensão de cisalhamento, a qual é variável parabolicamente ao longo da altura da viga, visto que sua seção transversal pode ser tratada como uma seção retangular, a qual, inicialmente, tem largura da aba superior, B_e , depois, com espessura da ‘alma’, T_w , por fim, a largura da aba inferior, B_i .

A tensão de cisalhamento variará sutilmente ao longo da ‘alma’, e a tensão de cisalhamento saltará na junção da aba com a ‘alma’, visto que sua espessura muda nesse ponto da seção transversal. Fazendo um comparativo, podemos dizer que ‘alma’ suportará significativamente mais força cortante do que as abas. Algumas limitações ao uso da fórmula de cisalhamento serão discutidas a seguir.

Tratando-se de uma distribuição uniforme da tensão de cisalhamento sobre a largura de uma seção, podemos afirmar que a tensão de cisalhamento média é calculada ao longo de sua largura. Isso é possível comparando-a à uma análise matemática mais exata fundamentada na teoria da elasticidade. Sendo assim, se a seção transversal da viga for retangular, a distribuição real da tensão de cisalhamento ao longo do eixo neutro variará de acordo com a teoria da elasticidade.

Podemos perceber que o valor máximo $\tau'_{m\acute{a}x}$ ocorrerá nas bordas da seção transversal, e sua intensidade dependerá da relação largura por comprimento, de modo que, para seções com relação $b/h= 0,5$, $\tau'_{m\acute{a}x}$, terá valor de 3% maior quando comparada à calculada pela fórmula do cisalhamento. Porém, para seções cuja relação $b/h=2$, ou seja, para seções largas, temos $\tau'_{m\acute{a}x}$, que apresentará valor 40% maior quando comparada à calculada pela fórmula do cisalhamento.

À medida que a seção se torna mais larga ou a relação b/h aumenta, percebemos que o erro também aumenta, de modo que essa ordem é intolerável, caso a fórmula de cisalhamento seja usada para determinar a tensão de cisalhamento na aba de uma viga de abas largas.

Vale lembrar que a fórmula de cisalhamento não oferece resultados precisos quando usada para determinação de tensão de cisalhamento na junção aba e 'alma' de uma viga de abas largas, já que se trata de um ponto de mudança súbita na seção transversal, onde ocorrem concentração de tensão. Além disso, a tensão de cisalhamento nos limites deve ser nula, ou seja, em regiões internas das abas, nas quais as superfícies são livres, é possível que a tensão de cisalhamento também seja nula. Porém, quando tratadas na prática, essas limitações citadas anteriormente são desprezadas nos projetos de engenharia, como citado anteriormente.

Quando tratamos de uma viga com seção irregular ou contorno não retangular, percebemos que a aplicação da fórmula de cisalhamento para determinar a tensão de cisalhamento média ao longo da reta AB será orientada, conforme Figura 4.14.

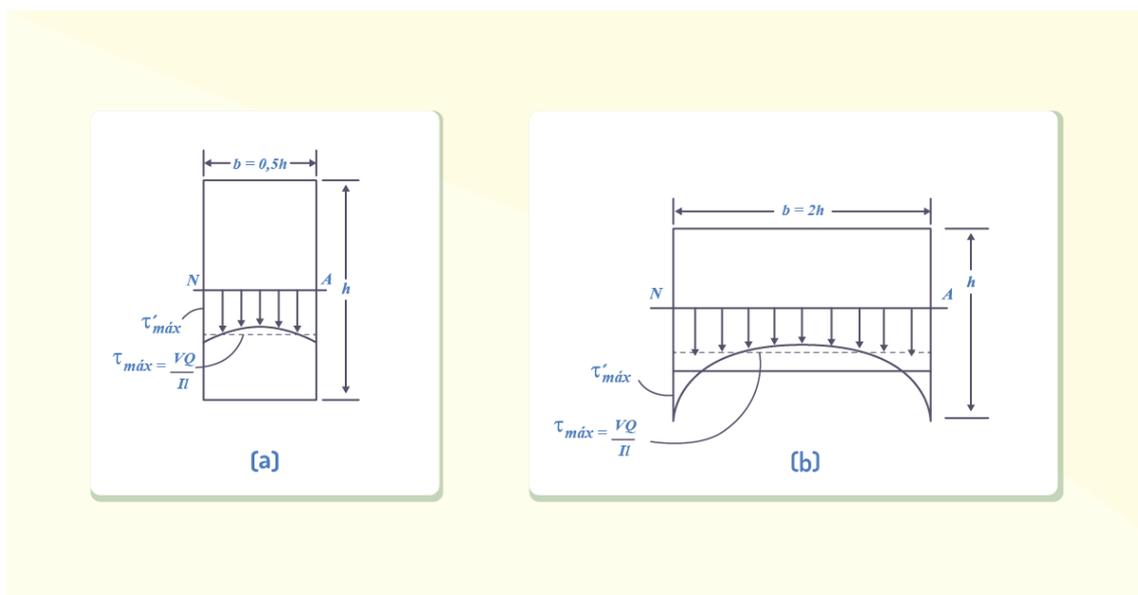


Figura 4.14 - Representação de uma viga com seção irregular

Fonte: Adaptada de Hibbeler (2010, p. 267).

Admitindo um elemento do material retirado do ponto b da superfície, de modo que uma de suas faces encontra-se na superfície externa da viga, percebemos que a tensão de cisalhamento calculada na face frontal do elemento pode ser desdobrada nos componentes de τ' e τ'' .

Admitindo ainda que a componente τ' deve ser igual a zero, dada sua componente longitudinal que atua na superfície do contorno livre de tensão, temos que essa também deve ser nula. Nessa condição, a tensão de cisalhamento que atua sobre o elemento de contorno deve ser tangente ao contorno, de modo que, ao longo da reta AB, deve ser orientada, pois a maior inclinação das tensões de cisalhamento é dada exatamente em A e B, na qual a tensão de cisalhamento máxima também é acordada nesses pontos, que podem ser obtidos por meio dos princípios da teoria da elasticidade. Assim, podemos aplicar a fórmula do cisalhamento para obter a tensão de cisalhamento atuante em cada linha descrita na Figura 4.14.

Aplicando a fórmula de cisalhamento para obter a tensão de cisalhamento que atua em cada linha das retas que interceptam as tangentes ao contorno da seção transversal em ângulos retos, percebemos que elas são verticais e constantes. Portanto, a fórmula de cisalhamento não oferece resultados precisos quando aplicada a elementos com seção transversal curta ou larga, ou a pontos em que a seção muda subitamente. Desse modo, ela é viável de ser determinada por meio de métodos mais avançados baseados na teoria da elasticidade (HIBBELER, 2010; BOTELHO, 1998).

ATIVIDADES

4) Considere uma viga cuja seção transversal é retangular e seu momento interno é 2,88 kN para a seção transversal de 60x120mm. Agora, determine o cálculo advindo dessa situação.

- a) O momento de inércia dessa viga terá valor de $5,64 \times 10^4 \text{ mm}^4$.
- b) O momento de inércia dessa viga terá valor de $8,64 \times 10^4 \text{ mm}^4$.
- c) A tensão máxima sobre a viga será de 12 N/mm^2 .
- d) O momento de inércia dessa viga terá valor de $864 \times 10^4 \text{ mm}^4$ e tensão máxima de 15 MPa.
- e) A tensão máxima sobre a viga será de 20 MPa.

INDICAÇÕES DE LEITURA

Nome do livro: Resistência dos materiais - uma abordagem sintética

Editora: Elsevier

Autor: Marceo Greco e Daniel Nelson Maciel

ISBN: 8535274588

Comentário: O livro relaciona capacidade de resistência dos materiais usados em estruturas com as aplicações específicas para engenharias, além de ações usuais em problemas práticos de engenharia e cálculo para equilíbrio de corpos, esforços solicitantes, tensões, dentre outros, sendo bastante pertinente para complementação do conhecimento do estudante.

CONCLUSÃO DO LIVRO

O principal objetivo destes estudos foi oferecer ao(à) aluno(a) um material que apresentasse, além de uma teoria esclarecedora e precisa sobre os principais fundamentos da resistência dos materiais, situações, exemplos e aplicações condizentes com a vivência da futura profissão.

Assim, foram estudados, nestas unidades, os temas: Mecânica e Resistência dos Materiais, Análise Estrutural: Forças em Vigas e Cabos, Forças distribuídas, Deformações Mecânicas e suas especificidades.

Na Unidade I, abordamos conceitos importantes do ramo da mecânica, em especial, a estática, o conceito de corpos rígidos, as definições de forças interna e externa, o princípio da transmissibilidade e o teorema de Virignon, além dos conceitos de momento angular sobre um ponto P. Na Unidade II, vimos assuntos como estruturas, vigas, forças e cabos.

Na Unidade III, estudamos conceitos acerca de centroide ou baricentro, utilização de integrais para determinar o centro de gravidade de determinadas figuras planas e espaciais e, também, mecanismos para determinar o momento de inércia para essas figuras. Já na Unidade IV, vimos conceitos iniciais de resistência dos materiais, cargas axiais, torção e flexão e cisalhamento transversal.

Esperamos que o(a) estudante tenha compreendido os ensinamentos por meio de: explanações do comportamento físico dos materiais, seja este sob efeito de cargas axiais ou não; tensão normal e de cisalhamento; modelagem e teoria; torção e flexão; equilíbrio, compatibilidade de deformação e comportamento do material; bem como os diversos métodos para o cálculo e a determinação de deflexão e de reações sobre os elementos estruturais, mesmo estaticamente indeterminados.

REFERÊNCIAS

UNIDADE I

BORJA, E. **Estabilidade das construções** - tecnologia em construção de edifícios. Disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/edilbertoborja/estabilidade-das-construcoes/estabilidade-das-construcoes-superior-2/apostila-completa-vigas-isostaticas/vigas-isostaticas-apostila-completa-em-pdf>. Acesso em: 06 jan. 2020.

BRASIL. INMETRO. Tradução da publicação do BIPM – Resumo do Sistema Internacional de Unidades - SI. Disponível em: http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf. Acesso em: 10 dez. 2019.

GENRO, T. Um novo ponto de equilíbrio. **Carta Maior**, 2014. Disponível em: <https://www.cartamaior.com.br/?/Editoria/Politica/Um-novo-ponto-de-equilibrio/4/32430>. Acesso em: 06 jan. 2020.

HIBBLELER, R. C. **Mecânica: Estática**. Belo Horizonte: Pearson, 2010.

ISAAC Newton. **Brincando com a Física e a Química**. Disponível em: <http://brincandocomafisicaequimica.blogspot.com/2011/11/isaac-newton.html>. Acesso em: 06 jan. 2020.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para Engenharia – Estática**. 6. ed. São Paulo: Editora LTC, 2009.

SÃO PAULO. IPEM - Instituto de Pesos e Medidas do Estado de São Paulo. **Múltiplos e Submúltiplos das Unidades SI**. Disponível em: http://www.ipem.sp.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=355&Itemid=281. Acesso em: 10 dez. 2019.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I - Mecânica**. 10. ed. São Paulo: Editora Pearson Education, 2006.

UNIDADE II

ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS E TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projetos de Estruturas de Concreto - Procedimentos. Rio de Janeiro: ABNT, 2004. 225 p. Disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/valtencirgomes/disciplinas/construcao-de-edificios/abnt-6118-projeto-de-estruturas-de-concreto-procedimento>. Acesso em: 30 nov. 2019.

BOTELHO, M. H. C. **Resistência dos materiais para entender e gostar**: um texto curricular. São Paulo: Studio Nobel, 1998. 248 p.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson, 2010. 640 p.

MORAES, V. A Casa. **Letras**. Disponível em: <https://www.lettras.mus.br/vinicius-de-moraes/49255/>. Acesso em: 08 jan. 2020.

MOREIRA, A. L. N.; PINHEIRO, L. M. **Tabela 1.1**. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/concreto/Textos/20%20Tabelas%20gerais.pdf>. Acesso em: 06 dez. 2019.

UNIDADE III

BEER, F. P. **Mecânica Vetorial para Engenheiros**. Porto Alegre: Editora AMGH, 2012.

LEHMKUHL, D.; SMISTH, L. K. **Cinesiologia clínica de Brunnstom**. São Paulo: Manole, 1989.

OKUNO, E.; FRATIN, L. **Desvendando a física do corpo humano**. São Paulo: Editora Manole, 2003.

WATKIN, J. **Estrutura e Função do Sistema Musculoesquelético**. Porto Alegre: Editora Artmed, 2001.

UNIDADE IV

BOTELHO, M. H. C. **Resistência dos Materiais para Entender e Gostar**: um texto curricular. São Paulo: Studio Nobel, 1998. 248 p.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

MASSUCATO, F. *et al.* **Princípio de Saint-Venant**. EM423 – Resistência dos Materiais. Unicamp, 2010. Disponível em: [http://www.fem.unicamp.br/~assump/Projetos/2010/g5\(1\).pdf](http://www.fem.unicamp.br/~assump/Projetos/2010/g5(1).pdf). Acesso em: 11 dez. 2019.

ONOUYE, B. **Estática e Resistência dos Materiais para Arquitetura e Construção de Edificações**. 4. ed. São Paulo: LTC, 2015.

SILVA, V. D. **Mecânica e resistência dos materiais**. 3. ed. São Paulo: Zuari, 2013.